

Tentamen i SF2715 Tillämpad kombinatorik, 7,5 hp

Onsdagen den 27 maj 2009 kl. 8:00–13:00

Hjälpmedel: Manuella skrivdon (pennor, suddgummi, linjal och räknesticka).

Instruktioner: Tentamen består av 8 uppgifter, i ett par fall uppdelade i mindre deluppgifter. Maximal poäng på varje uppgift och deluppgift framgår nedan. 20 poäng inklusive bonuspoäng ger garanterat godkänt. Motivera dina svar.

1. Beräkna antalet permutationer på mängden $\{1, 2, \dots, 15\}$ med exakt fem cykler, alla av olika längd.

(3p)

2. Låt a_n vara antalet ord av längd n över alfabetet $\{0, 1, 2, 3\}$ med egenskaperna att 1 inte får komma direkt efter ett jämnt tal och att 2 och 3 inte får komma direkt efter ett udda tal. Detta innebär att delorden i mängden $\{01, 21, 12, 32, 13, 33\}$ är förbjudna. Hitta konstanter r och s sådana att

$$a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2}$$

för alla $n \geq 3$.

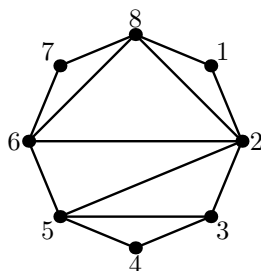
(3p)

3. Låt $n \geq m$. Visa att följande antal är lika:

- * Antalet partitioner av talet n i exakt m delar.
- * Antalet partitioner av talet $n - m$ där alla delar har storlek högst m .

(3p)

4. Beräkna det kromatiska polynomet till grafen i nedanstående figur.



(3p)

5. Vi säger att en partition av $\{1, \dots, n\}$ är singletonfri om varje delmängd i partitionen har minst två element. Låt A_n vara antalet singletonfria partitioner av $\{1, \dots, n\}$; vi definierar $A_0 = 1$. Exempelvis är $A_4 = 4$, ty vi har fyra singletonfria partitioner:

$$\{1234\}, \{12, 34\}, \{13, 24\}, \{14, 23\};$$

vi skriver $1234 = \{1, 2, 3, 4\}$ och så vidare.

- (a) Visa att

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-2} A_k \binom{n-1}{k}$$

för $n \geq 2$.

(3p)

- (b) Definiera

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} A_n \frac{x^n}{n!}.$$

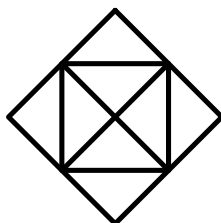
Visa att

$$f'(x) = (e^x - 1)f(x),$$

där $f'(x)$ betecknar derivatan av $f(x)$. Det är tillåtet att använda sig av formeln i uppgift (a) även om (a) inte är löst.

(3p)

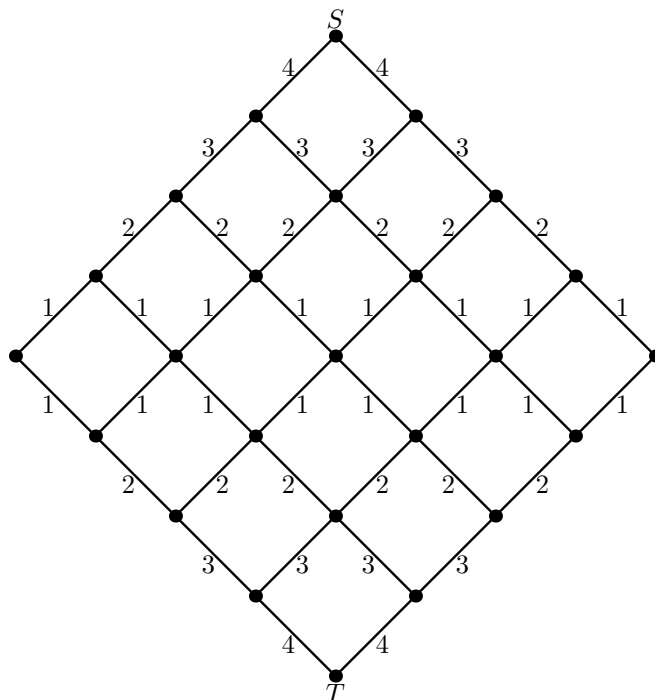
6. Man vill tillverka leksakssmycken sammansatta av åtta triangelformade glasbitar i följande mönster:



För $0 \leq k \leq 8$, beräkna antalet sätt att färga varje glasbit röd eller blå så att exakt k av glasbitarna är blåa. Två färgningar anses vara identiska om den ena kan överföras i den andra via en rotation eller spegling, alltså via ett element från den dihedrala gruppen D_4 . (En korrekt lösning för $k \leq 2$ ger 2 poäng.)

(6p)

7. (a) Låt D vara nätverket i nedanstående figur, med angivna kapaciteter. Kanterna kan enbart användas i nedåtgående riktning. Bestäm ett maximalt flöde i D från S till T , och motivera att det givna flödet är maximalt. Du behöver inte beskriva i detalj hur du bestämmer flödet.



(2p)

- (b) Låt D vara ett nätverk med källa s och sänka t . Låt V beteckna hörnmängden i D , och låt $f : V \times V \rightarrow \mathbb{Z}$ vara ett flöde i D från s till t . (Vi har alltså att $f(v, u) = -f(u, v)$ för alla $u, v \in V$ och $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$ för alla $u \in V \setminus \{s, t\}$.) Visa att nettoflödet ut ur s är lika med nettoflödet in i t , alltså att

$$\sum_{v \in V} f(s, v) = \sum_{v \in V} f(v, t).$$

(Det går bra att lösa uppgiften med Camerons beteckningar.)

(4p)

8. Låt M vara en binär matris med 7 rader och 20 kolumner. Visa att man kan hitta en mängd bestående av högst 4 kolumner i M vars summa är lika med 0 modulo 2.

Ledning. Hitta en lämplig kodteoretisk tolkning av problemet.

(6p)

Använd gärna nedanstående figurer i din lösning till 7 (a).

