

Tentamen i SF2715 Tillämpad kombinatorik, 6 hp
Onsdagen den 19 augusti 2009 kl. 14:00–19:00

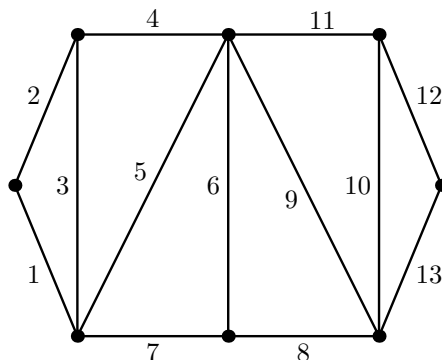
Hjälpmedel: Manuella skrivdon (pennor, suddgummi, linjal och räknesticka).

Instruktioner: Tentamen består av 7 uppgifter, i ett par fall uppdelade i mindre deluppgifter. Maximal poäng på varje uppgift och deluppgift framgår nedan. 20 poäng inklusive bonuspoäng ger garanterat godkänt. Motivera dina svar.

1. Beräkna antalet partitioner av mängden $\{1, 2, \dots, 11\}$ med exakt fyra delmängder, alla av olika (och nollskild) storlek.

(4p)

2. I nedanstående graf är varje kant försedd med en vikt.



Bestäm ett minimalt uppspännande träd i grafen, alltså ett uppspännande träd med egenskapen att summan av kantvikterna i trädet är så liten som möjligt. Ange även denna summa.

(4p)

3. Beräkna det par av tablåer som svarar mot permutationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 1 & 7 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

under RSK-korrespondensen.

(4p)

4. Catalantalen $C_0, C_1, \dots$ definieras (som bekant) som $C_0 = 1$ och

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$$

för $n \geq 1$. Definiera

$$C(x) = \sum_{n \geq 0} C_n x^n.$$

Visa att

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x},$$

och bestäm tecknet framför rotuttrycket.

(6p)

5. I en planär graf med V hörn, E kanter och F regioner (den obegränsade regionen medräknad) gäller att

$$3F \leq 2E$$

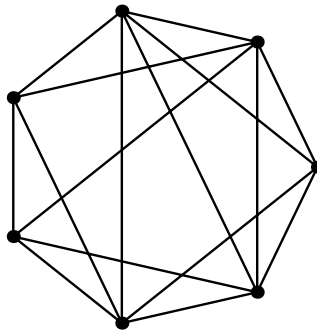
(du behöver inte visa detta). Vi förutsätter här att det finns högst en kant mellan varje par av hörn.

- (a) Använd ovanstående olikhet och Eulers formel för att visa att en planär graf med V hörn och E kanter uppfyller olikheten

$$E \leq 3V - 6.$$

(4p)

- (b) Avgör om följande graf kan ritas i planet utan korsande kanter. Motivera ditt svar.



(2p)

6. Låt C vara en linjär e -rättande binär kod av längd n . Låt C' vara den binära koden av längd $3n$ bestående av alla tripplar $(a, b, a + b)$, där $a, b \in C$.

(a) Visa att C' är linjär.

(1p)

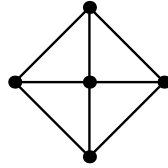
(b) Visa att varje nollskilt kodord i C' innehåller minst $4e + 2$ ettor.

(3p)

(c) Visa att C' är $2e$ -rättande.

(2p)

7. Låt G vara grafen i följande figur:



(a) Beräkna det kromatiska polynomet till G .

(2p)

(b) Betrakta två hörnfärgningar av G som ekvivalenta om den ena kan överföras i den andra via en rotation eller spegling svarande mot ett element i den dihedrala gruppen D_4 . För varje positivt heltal r , beräkna antalet ekvivalensklasser av hörnfärgningar av G med färgerna $1, \dots, r$. Som vanligt kräver vi att hörn som är sammanbundna av en kant har olika färg. Det som eftersöks är alltså det omärkta kromatiska polynomet till G .

(4p)

Lösningar

1. Man ser genom prövning att storlekarna på de fyra delmängderna måste vara 1, 2, 3 och 5. Detta behöver inte motiveras närmare, men för fullständighetens skull ger vi ett resonemang: Om vi ordnar delmängderna från den kortaste till den längsta och låter s_i vara storleken på den i :te delmängden inser vi att $s_1 \geq 1$, $s_2 \geq 2$, $s_3 \geq 3$ och $s_4 \geq 4$. Nu är $1+2+3+4=10$, vilket är ett mindre än 11. Alltså måste gälla att $s_i = i$ för tre index i och $s_i = i+1$ för det fjärde indexet. Eftersom alla s_i är olika blir den enda möjligheten att storlekarna är 1, 2, 3 och 5.

Låt oss välja delmängderna i tur och ordning, där vi börjar med den minsta delmängden.

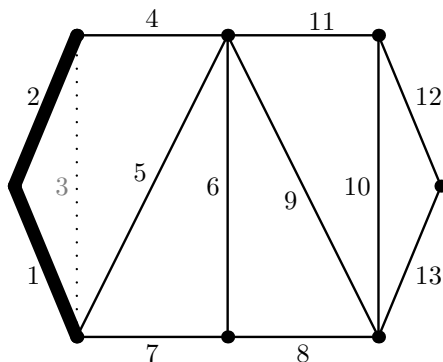
- Vi kan välja delmängden av storlek 1 på $\binom{11}{1} = 11$ olika sätt.
- Vi har nu 10 element kvar och kan därför välja delmängden av storlek 2 på $\binom{10}{2} = 45$ olika sätt.
- Med 8 återstående element kan vi välja delmängden av storlek 3 på $\binom{8}{3} = 56$ olika sätt.
- Delmängden av storlek 5 är entydigt bestämd av de första tre delmängderna, vilket innebär att det bara finns ett val för denna delmängd.

Multiplikation ger att det totala antalet val är

$$11 \cdot 45 \cdot 56 \cdot 1 = 27720.$$

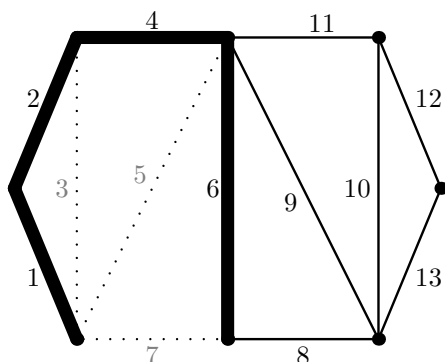
2. Enligt sats får vi ett minimalt uppspännande träd genom att använda den giriga algoritmen. I denna algoritm bildar vi ett träd i steg genom att i varje steg försöka lägga till en kant med en så liten vikt som möjligt. Innan vi använder algoritmen noterar vi att varje heltalsvikt mellan 1 och 13 förekommer precis en gång. Vi låter "kant i " beteckna kanten med vikt i .

- I de tre första stegen försöker vi lägga till i tur och ordning kant 1, kant 2 och kant 3. Det går bra med de två första kanterna, men kant 3 bildar en cykel med kant 1 och kant 2 och ska därmed inte vara med i trädet. Vi har därmed följande situation:

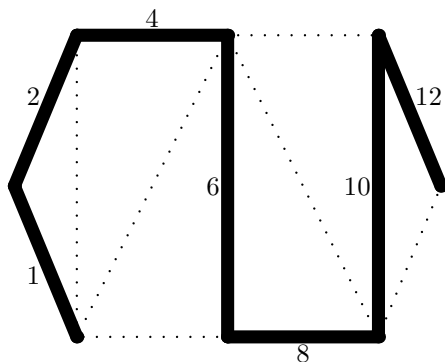


Tjocka kanter är med i trädet, medan streckade kanter inte är det.

- Kant 4 går bra att lägga till, medan kant 5 bildar en cykel med kanterna 1, 2 och 4. Vi kan sedan lägga till kant 6, men kant 7 bildar en cykel med kanterna 1, 2, 4 och 6. Detta ger följande situation:



- Vi resonerar nu på samma sätt med de återstående kanterna och konstaterar att kanterna 8, 10 och 12 är med i trädets, medan kanterna 9, 11 och 13 inte är med. Slutresultatet blir därmed följande träd:



Trädets vikt är som synes

$$1 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 43.$$

3. Beräkna det par av tablåer som svarar mot permutationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 1 & 7 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

under RSK-korrespondensen.

Vi skriver

$$\pi = \boxed{8} \boxed{3} \boxed{1} \boxed{7} \boxed{2} \boxed{6} \boxed{4} \boxed{5}$$

I varje steg använder vi fet stil och understruket för att markera ändringar jämfört med föregående steg.

1. Aktuellt element är 8. Par av tablåer efter instoppning av detta element:

$$\boxed{\underline{8}} \quad \boxed{\underline{1}}$$

Element kvar: $\boxed{3} \boxed{1} \boxed{7} \boxed{2} \boxed{6} \boxed{4} \boxed{5}$

2. Aktuellt element är 3. Par av tablåer efter instoppning av detta element:

<u>3</u>	1
<u>8</u>	<u>2</u>

Element kvar:

1	7	2	6	4	5
---	---	---	---	---	---

3. Aktuellt element är 1. Par av tablåer efter instoppning av detta element:

<u>1</u>	1
<u>3</u>	2
<u>8</u>	<u>3</u>

Element kvar:

7	2	6	4	5
---	---	---	---	---

4. Aktuellt element är 7. Par av tablåer efter instoppning av detta element:

1	<u>7</u>	1	<u>4</u>
3		2	
8		3	

Element kvar:

2	6	4	5
---	---	---	---

5. Aktuellt element är 2. Par av tablåer efter instoppning av detta element:

1	<u>2</u>	1	4
3	<u>7</u>	2	<u>5</u>
8		3	

Element kvar:

6	4	5
---	---	---

6. Aktuellt element är 6. Par av tablåer efter instoppning av detta element:

1	2	<u>6</u>	1	4	<u>6</u>
3	7		2	5	
8			3		

Element kvar:

4	5
---	---

7. Aktuellt element är 4. Par av tablåer efter instoppning av detta element:

1	2	<u>4</u>	1	4	6
3	<u>6</u>		2	5	
<u>7</u>			3		
<u>8</u>			<u>7</u>		

Element kvar:

5

8. Aktuellt element är 5. Par av tablåer efter instoppning av detta element:

1	2	4	<u>5</u>	1	4	6	<u>8</u>
3	6			2	5		
7				3			
8				7			

Detta är det sökta paret av tablåer.

4. Notera först att

$$\begin{aligned}
 C(x) &= C_0 + \sum_{n \geq 1} C_n x^n = 1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} x^n \\
 &= 1 + \sum_{i \geq 0} \sum_{n \geq i+1} C_i C_{n-i-1} x^n \\
 [j = n - i - 1] &= 1 + \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} C_i C_j x^{i+j+1} \\
 &= 1 + x \sum_{i \geq 0} C_i x^i \sum_{j \geq 0} C_j x^j = 1 + x(C(x))^2.
 \end{aligned}$$

Notera bytet av summationsordning på andra raden. Alltså har vi att

$$(C(x))^2 = \frac{C(x)}{x} - \frac{1}{x}.$$

Om vi löser denna andragradsekvation i $C(x)$ får vi att

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x},$$

där vi väljer ett minustecken (och inte ett plustecken) framför rottecknet för att täljarens konstantterm ska bli 0.

5. (a) Eulers formel säger att

$$F - E + V - 2 = 0.$$

Olikheten $3F \leq 2E$ kan skrivas som

$$F \leq \frac{2E}{3}.$$

Instoppat i Eulers formel ger detta olikheten

$$0 = F - E + V - 2 \leq \frac{2E}{3} - E + V - 2 = -\frac{E}{3} + V - 2,$$

det vill säga

$$\frac{E}{3} \leq V - 2 \iff E \leq 3V - 6.$$

(b) För denna graf gäller att $V = 7$ och $E = 16$. Eftersom

$$3V - 6 = 15 < 16 = E$$

ger (a) att grafen ej är planär, alltså att den ej kan ritas i planet utan korsande kanter.

6. (a) För att visa att C' är linjär räcker det att visa att summan av varje par av kodord också är ett kodord. Låt nu $(a, b, a+b)$ och $(a', b', a'+b')$ vara två kodord. Summan av dessa kodord är

$$\begin{aligned}
 (a, b, a+b) + (a', b', a'+b') &= (a+a', b+b', a+b+a'+b') \\
 &= (a+a', b+b', (a+a') + (b+b')).
 \end{aligned}$$

Eftersom C är en linjär kod har vi att de två orden $a'' = a + a'$ och $b'' = b + b'$ tillhör C . Alltså är

$$(a + a', b + b', (a + a') + (b + b')) = (a'', b'', a'' + b'')$$

ett kodord i C' . Slutsatsen är att C' är linjär.

- (b) Det minimala avståndet i C är minst $d = 2e + 1$. Eftersom C är linjär är detta ekvivalent med att varje nollskilt kodord i C innehåller minst d ettor. Låt $c = (a, b, a + b)$ vara ett nollskilt kodord i C' . Vi vill visa att c innehåller minst $4e + 2 = 2d$ ettor. Vi delar in i fall:

- $a = 0$. Då är $c = (0, b, b)$, och b är nollskilt. Eftersom b innehåller minst d ettor kommer c att innehålla minst $2d$ ettor.
- $b = 0$. Då är $c = (a, 0, a)$, och a är nollskilt. Än en gång drar vi slutsatsen att c innehåller minst $2d$ ettor.
- a och b är båda nollskilda. Då har vi nollskilda kodord från C på de två första positionerna i c och därmed minst $2d$ ettor.

Alltså innehåller varje nollskilt kodord i C' minst $2d$ ettor.

- (c) Eftersom C' är linjär enligt (a) och eftersom varje nollskilt kodord i C' innehåller minst $4e + 2$ ettor enligt (b) kan vi dra slutsatsen att det minimala avståndet i C' är minst $4e + 2$. Alltså är koden $2e$ -rättande, ty

$$2 \cdot (2e) + 1 = 4e + 1 < 4e + 2.$$

7. (a) Låt $f_G(r)$ beteckna det kromatiska polynomet till G . Hörnet i mitten är sammanbundet till samtliga övriga hörn, vilket innebär att

$$f_G(r) = r \cdot f_H(r-1),$$

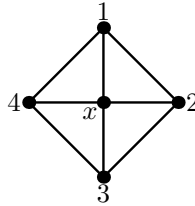
där H är den graf som erhålls om vi tar bort hörnet i mitten. Notera att H sammanfaller med den cykliska grafen C_4 . Detta innebär att

$$f_H(r) = r(r-1)(r^2 - 3r + 3).$$

Alltså har vi att

$$\begin{aligned} f_G(r) &= r \cdot f_H(r-1) = r(r-1)(r-2)((r-1)^2 - 3(r-1) + 3) \\ &= r(r-1)(r-2)(r^2 - 5r + 7). \end{aligned}$$

- (b) Numrera hörnen enligt följande figur:



För varje element π i den dihedrala gruppen, låt G/π vara grafen med ett hörn för varje bana under π och med en kant mellan två banor A och B om det finns två sammanbundna hörn a och b sådana att a tillhör banan A och b tillhör banan B . Enligt sats ges antalet ekvivalensklasser av färgningar av

$$\tilde{f}_G(r) = \frac{1}{|D_4|} \sum_{\pi \in D_4} f_{G/\pi}(r).$$

Vi har följande tabell:

π	C_4/π
$(x)(1)(2)(3)(4)$	G
$(x)(1234)$	0
$(x)(1432)$	0
$(x)(13)(24)$	K_3
$(x)(14)(23)$	0
$(x)(12)(34)$	0
$(x)(13)(2)(4)$	$K_4 - e$
$(x)(24)(1)(3)$	$K_4 - e$

Här låter vi 0 beteckna grafer med en ögla; sådana grafer går ej att färglägga. $K_4 - e$ betecknar en graf som erhålls från K_4 genom att ta bort en kant. Exempelvis har vi i fallet då $\pi = (13)(2)(4)$ att G/π har hörnmängden $\{13, 2, 4, x\}$ och en kant mellan alla par av hörn utom mellan 2 och 4. Nu är

$$f_{K_3}(r) = r(r-1)(r-2)$$

och

$$f_{K_4-e}(r) = r(r-1)(r-2)^2.$$

Detta ger tillsammans med (a) att

$$\begin{aligned}\tilde{f}_G(r) &= \frac{1}{|D_4|} (f_G(r) + f_{K_3}(r) + 2f_{K_4-e}(r)) \\ &= \frac{1}{8} (r(r-1)(r-2)(r^2-5r+7) + r(r-1)(r-2) \\ &\quad + 2r(r-1)(r-2)^2) \\ &= \frac{r(r-1)(r-2)}{8} ((r^2-5r+7) + 1 + 2(r-2)) \\ &= \frac{r(r-1)(r-2)(r^2-3r+4)}{8}.\end{aligned}$$