KTH Matematik
Jakob Jonsson, tel 790 72 02

Tentamen i SF2715 Tillämpad kombinatorik, 6 hp

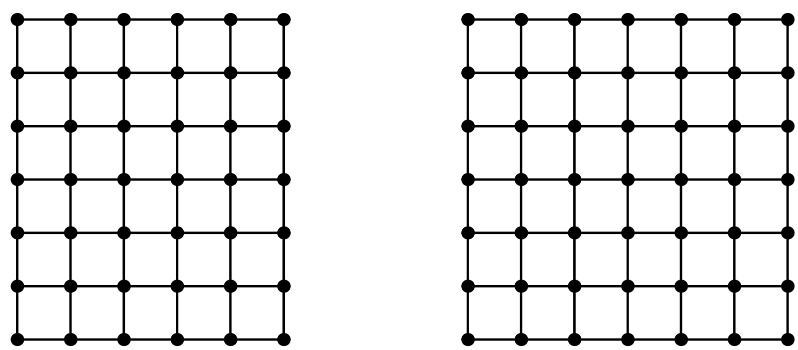
Onsdagen den 13 januari 2010 kl. 08:00–13:00

Hjälpmedel: Manuella skrivdon (pennor, suddgummi, linjal och räknesticka).
Instruktioner: Tentamen består av 7 uppgifter, i ett par fall uppdelade i mindre deluppgifter. Maximal poäng på varje uppgift och deluppgift framgår nedan. 16 poäng ger garanterat godkänt. Motivera dina svar.

1. För $0 \leq k \leq n$, beräkna antalet heltalsföljder $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sådana att $a_0 = 0$, $a_n = k$ och $a_{i-1} \leq a_i \leq a_{i-1} + 1$ för $1 \leq i \leq n$.

(4p)

2. För var och en av nedanstående två grafer, avgör om grafen är Hamiltonsk. Ditt svar ska motiveras med en explicit Hamiltoncykel eller ett bevis för att Hamiltoncykler saknas.



(4p)

3. För $n \geq 1$, beräkna antalet permutationer av mängden $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ sådana att cykeluppdelningen innehåller en cykel av längd exakt n.

(4p)

4. Låt a_n vara antalet (oordnade) partitioner av mängden $\{1, \ldots, n\}$ med egenskapen att alla delmängder har storlek högst 2. Exempelvis är $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$ och $a_4 = 10$. Vi sätter $a_0 = 1$.

   (a) Visa att $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$ för $n \geq 2$.

   (3p)

   (b) Definiera
   $$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n.$$
   Visa att
   $$f'(x) = (1+x)f(x),$$
   och dra slutsatsen att
   $$f(x) = e^{x+x^2/2}.$$

   (3p)

5. För en given graf G, låt $f_G(r)$ beteckna det kromatiska polynomet till G.

   (a) För varje $k \geq 1$, konstruera en graf G sådan att
   $$f_G(r) = r(r-1)^k(r-2).$$

   (4p)

   (b) Visa att det inte finns någon graf G sådan att
   $$f_G(r) = r(r-1)(r-2)(r^2 - 7r + 11).$$

   (2p)

6. Låt C vara mängden av binära följder $(a_1, a_2, \ldots, a_{14})$ av längd 14 sådana att $a_k = a_{k-1} + a_{k-4}$ (modulo 2) för $5 \leq k \leq 14$.

   (a) Visa att C är en linjär kod.

   (2p)

   (b) Ange en generatormatris för C.

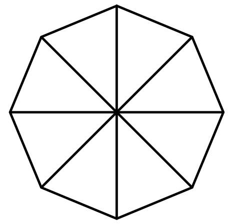
   (2p)

   (c) Ange en kontrollmatris (*check matrix*) för C.

   (2p)

   (C är 3-rättande, men det behöver du inte visa.)

7. Studera följande regelbundna oktagon, som är uppdelad i åtta likadana regioner:



Beräkna antalet färgningar av de åtta regionerna med färgerna rött, grönt och blått med restriktionen att högst två regioner får ha färgen röd. Två färgningar betraktas som identiska om den ena kan överföras i den andra via en rotation av oktagonen. Intilliggande regioner får ha samma färg.

(6p)