Tentamensskrivning, 2011-12-21, kl. 14.00–19.00.

SF1602 Diffint (envariabel), för F.

Hjälpmedel: penna, papper, suddgummi.

För att tillgodoräkna sig resultat från denna del krävs krävs minst 5 av 6 moduler godkända från Del 1. För betyg A krävs 28 poäng, för betyg B krävs 20 poäng, och för betyg C krävs 12 poäng. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING: DEL 2

11. Vi betraktar funktionen

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{3x}.$$

Rita grafen till funktionen, med indikation om var funktionen växer och var den avtar, eventuella asymptoter, och konvexitet-konkavitet samt eventuella inflexionspunkter. (5)

Funktionen har $x = 0$ som vertikal asymptot, eftersom vi delar med x och $e^0 = 1$. Dessutom har vi

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0,$$

vilket gör $y = 0$ till horisontell asymptot. Några fler asymptoter finns ej, eftersom exponentialfunktionen e^{-x} växer för snabbt då $x \to +\infty$.

Vi deriverar:

$$f'(x) = \frac{2x-1}{3x^2}\, e^{2x}, \qquad x \neq 0.$$

Detta ger att $f'(x) > 0$ om $x > \frac{1}{2}$, och $f'(x) < 0$ om $x < \frac{1}{2}$ och $x \neq 0$. Funktionen är alltså strängt växande på intervallet $]\frac{1}{2}, +\infty[$, och strängt avtagande på intervallen $]-\infty, 0[$ och $]0, \frac{1}{2}$. Vi deriverar nu en gång till:

$$f''(x) = \frac{4x^2 - 4x + 2}{3x^3}\, e^{2x}.$$

Eftersom $4x^2 - 4x + 2 = (2x-1)^2 + 1 \geq 1$ ser vi att $f''(x) < 0$ på intervallet $]-\infty, 0[$ samt att $f''(x) > 0$ på intervallet $]0, +\infty[$. Därför är $f(x)$ strängt konkav på $]-\infty, 0[$, och strängt konvex på $]0, +\infty[$. Inflexionspunkter saknas. P g a tekniska problem avstår vi från att rita upp grafen.

---

12. Betrakta den generaliserade integralen

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(5x)}{x^\beta}\, dx,$$

där β är en reell parameter. Avgör för vilka β som integralen konvergerar. (5)

Vi delar upp integrationen i två delar:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(5x)}{x^\beta}\, dx = \int_0^1 \frac{\arctan(5x)}{x^\beta}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(5x)}{x^\beta}\, dx.$$

Eftersom $\frac{\pi}{4} \le \arctan(5x) \le \frac{\pi}{2}$ på $[\frac{1}{5}, +\infty[$, kan vi göra jämförelsen

$$\frac{\pi}{4} \int_{1/5}^{+\infty} \frac{dx}{x^\beta} \le \int_{1/5}^{+\infty} \frac{\arctan(5x)}{x^\beta}\, dx \le \frac{\pi}{2} \int_{1/5}^{+\infty} \frac{dx}{x^\beta}.$$

Integranden är positiv, och jämförelsekriterier kan användas. Vi vet att integralen

$$\int_{1/5}^{+\infty} \frac{dx}{x^\beta}$$

konvergerar precis då $\beta > 1$. Avseende integralen på $]0, \frac{1}{5}]$, kan vi säga att

$$\frac{5x}{2} \le \arctan(5x) \le 5x, \qquad 0 < x \le \frac{1}{5},$$

så att

$$\frac{5}{2} \int_0^{1/4} \frac{x}{x^\beta}\, dx \le \int_0^{1/5} \frac{\arctan x}{x^\beta}\, dx \le 5 \int_0^{1/5} \frac{x}{x^\beta}\, dx.$$

Integralen

$$\int_0^{1/5} \frac{1}{x^{\beta-1}}\, dx$$

konvergerar precis då $\beta < 2$. Detta innebär att vår integral konvergerar om och endast om $1 < \beta < 2$.

---

13. En dag började snön falla och det fortsatte att snöa med jämn hastighet under några timmar. En snöplog med den speciella egenskapen att dess hastighet är omvänt proportionell mot snötäckets tjocklet startade kl 12.00. Det visade sig att den tillryggalade en dubbelt så lång vägsträcka under den första timman som under den andra. När började det snöa? (5)

Låt oss sätta tiden så att klockan 12.00 motsvarar $t = 0$. Låt nu $s(t)$ beteckna den tillryggalagda vägsträckan vid tiden t; då är förstås $s(0) = 0$. Nu gäller att

$$s'(t) = \frac{C}{t+T}, \qquad 0 \le t < +\infty,$$

där T betecknar antalet timmar sedan det började snöa, enligt modellen för snöfallet och plogens egenskaper. Det följer dessutom ur uppgiften att

$$2\,s(2) = 3\,s(1).$$

Eftersom

$$s(t) = C\ln(t+T) - C\ln T$$

blir således

$$2\,(C\ln(2+T) - C\ln T) = 3\,(C\ln(1+T) - C\ln T).$$

Om vi delar med C överallt blir

$$2\,(\ln(2+T) - \ln T) = 3\,(\ln(1+T) - \ln T),$$

vilket leder till

$$2\ln(2+T) - 3\ln(1+T) + \ln T = 0,$$

dvs

$$T(2+T)^2 = (1+T)^3.$$

Detta är en ekvation av tredje graden där högstagradstermerna tar ut varandra:

$$T(T^2+4T+4) = T^3+3T^2+3T+1,$$

så att

$$T^2+T-1 = 0.$$

Denna ekvation har lösningarna

$$T = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2},$$

varav den negativa lösningen är orimlig. Det hade alltså gått

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

timmar sedan snöfallet började kl 12.00.

---

14. Under vissa omständigheter dimeriseras butadien (C_4H_6) enligt formeln $2\,C_4H_6 \rightarrow C_8H_{12}$. Detta sker med en hastighet som är proportionell mot kvadraten på koncentrationen. Om koncentrationen av butadien vid tiden $t = 0$ är c_0 (vi antar att $c_0 > 0$), och proportionalitetskonstanten är k, hur varierar då koncentrationen med tiden?

(5)

Låt $c_1(t)$ beteckna koncentrationen av butadien, och $c_2(t)$ koncentrerationen av dimeriserat butadien. Då har vi $c_1(0) = c_0$ och $c_2(0) = 0$ [vi antar att dimeriseringen ännu inte startat vid $t = 0$]. Enligt den kemiska reaktionen gäller att $2c_1(t) + c_2(t) = 2c_0$. Derivering av båda sidor ger att $2c_1'(t) + c_2'(t) = 0$. Enligt antagandet om reaktionshastigheten gäller att $c_2'(t) = k[c_1(t)]^2$. Detta ger (med $k_0 = k/2$) att $c_1'(t) = -k_0[c_1(t)]^2$ som är en autonom ekvation. Lösningen blir

$$c_1(t) = \frac{1}{A+k_0t} = \frac{c_0}{1+k_0c_0t},$$

där integrationskonstanten A redan identifierats.

---

15. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen

$$y'' + 4y = x^2.$$

Bestäm därefter den lösning som har begynnelsedata $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

(5)

Vi löser först den homogena ekvationen $y'' + 4y = 0$. Vi får karakteristiska ekvationen $r^2 + 4 = 0$ med de rent imaginära rötterna $r = \pm 2i$. Detta ger den allmänna homogena lösningen $y_h = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$. Vi söker därefter en partikulärlösning y_p på formen $y_p = ax^2 + bx + c$. Instoppning ger

$$2a + 4ax^2 + 4bx + 4c = x^2,$$

och vi ser att $a = 1/4$, $b = 0$, $c = -1/8$. Detta ger den allmänna lösningen

$$y = y_p + y_h = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8} + C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

---

16. Bestäm ekvationer för tangent och normal till kurvan $x^4 + 5y^4 = 21$ i punkten $(2, 1)$. (5)

Implicit derivering av ekvationen $x^4 + 5y^4 = 21$ ger att $4x^3dx + 20y^3dy = 0$. Stoppar vi in punkten $(2, 1)$ blir sambandet $32dx + 20dy = 0$. Ekvationen för tangenten blir härur

$$32(x - 2) + 20(y - 1) = 0.$$

Ekvationen för normalen blir istället

$$20(x - 2) - 32(y - 1) = 0.$$

---

17. Bestäm värdet på den reella parametern β, så att gränvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\beta x^3) - \beta x^3 + x^9}{x^{15}}$$

existerar. Bestäm sedan även gränsvärdet. (5)

Enligt Maclaurins formel har vi

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + t^7 B(t),$$

där $B(t)$ är en begränsad funktion. Om vi stoppar in $t = \beta x^3$ får vi

$$\sin(\beta x^3) = \beta x^3 - \frac{\beta^3 x^9}{6} + \frac{\beta^5 x^{15}}{120} + \beta^7 x^{21} B(\beta x^3).$$

Därför är

$$\sin(\beta x^3) - \beta x^3 + x^9 = \left(1 - \frac{\beta^3}{6}\right) x^9 + \frac{\beta^5 x^{15}}{120} + \beta^7 x^{21} B(\beta x^3),$$

och vi ser att

$$\beta = 6^{1/3}$$

för att gränsvärdet ska existera. Vi får då

$$\frac{\sin(\beta x^3) - \beta x^3 + x^9}{x^15} = \frac{\beta^5}{120} + \beta^7 x^6 B(\beta x^3) \to \frac{\beta^5}{120} = \frac{6^{5/3}}{120}$$

då $x \to 0$.