Tentamensskrivning, 2011-12-21, kl. 14.00–19.00.

SF1602 Diffint (envariabel), för F.

Hjälpmedel: penna, papper, suddgummi.

För betyg E krävs minst 4 av 6 moduler godkända (Del 1), och för betyg D krävs 5 av 6 moduler (Del 1). För högre betyg krävs dessutom deltagande i Del 2. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING: DEL 1

1. [MODUL 1] Betrakta funktionen

$$f(x) = \arccos(3x).$$

(a) Ange definitionsmängd och värdemängd till funktionen.

(b) Skriv upp inversfunktionen till f, med angivande av definitionsmängd och värdemängd för inversen.

(a) Definitionsmängden blir $[-1/3, 1/3]$, och värdemängden blir $[0, \pi]$.

(b) Inversfunktionen blir

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\cos x,$$

och dess definitionsmängd är $[0, \pi]$ och värdemängden är $[-1/3, 1/3]$.

---

2. [MODUL 2] Bestäm konstanterna a och b så att

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{då } x \leq 1, \\ x + 2, & \text{då } x > 1, \end{cases}$$

blir deriverbar överallt.

Funktionen $f(x)$ blir deriverbar automatiskt utom i $x = 1$, eftersom den ges av polynomuttryck. För att vara deriverbar i $x = 1$ krävs först kontinuitet:

$$f(1) = 1 + a + b = \lim_{x \to 1^+} x + 2 = 3,$$

dvs $a + b = 2$. Dessutom måste höfer- och vänster-derivatorna vara lika, dvs

$$2x + a\Big|_{x=1} = 1,$$

vilket ger $a = -1$. Då måste $b = 3$.

V.g. vänd!

3. [MODUL 3] Vad blir

$$\int \arctan x \, dx?$$

Du måste förklara din lösning noggrant, med angivande av metod.

Med hjälp av partiell integration erhålls

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

---

4. [MODUL 4] Beräkna derivatan av

$$\int_1^{\arcsin x} \frac{\sin t}{t} \, dt.$$

Vi inför funktionen

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} \, dt.$$

Vi söker alltså derivatan av $G(x) = F(\arcsin x)$. Enligt analysens huvudsats gäller att

$$F'(x) = \frac{\sin x}{x},$$

och kedjregeln ger således

$$G'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\sin \arcsin x}{\arcsin x} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}.$$

---

5. [MODUL 5] Bestäm volymen på den kropp spm bildas då området

$$0 \leq y \leq xe^{-x}, \quad 0 \leq x < +\infty,$$

roteras kring y-axeln.

Vi skivar med cylindriska skal. Skalelementet får volymen $2\pi x dx \cdot xe^{-x}$, så den totala volymen blir

$$2\pi \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 4\pi.$$

---

6. [MODUL 6] Bestäm Maclaurin-polynomet (Taylorutveckling vid origo alltså) av grad 200 till funktionen $f(x) = \sqrt{x^{100} + 400}$. Uttryck dessutom resttermen i lämplig form.

Vi betraktar först funktionen $g(x) = \sqrt{x + 400}$, och observerar att $f(x) = g(x^{100})$. Maclaurinutveckling ger

$$g(x) = \sqrt{400 + x} = g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2}g''(0)x^2 + R_3(x),$$

där resstermen på Lagrangeform kan skrivas

$$R_3(x) = \frac{1}{6}g'''(\theta x)x^3,$$

för något θ med $0 < \theta < 1$ (obs! θ får bero av x). Uträkning av derivator:

$$g'(x) = \frac{1}{2}(400 + x)^{-1/2}, \quad g''(x) = -\frac{1}{4}(400 + x)^{-3/2}, \quad g'''(x) = \frac{3}{8}(400 + x)^{-5/2},$$

get alltså:

$$g(x) = 20 + \frac{x}{40} - \frac{x^2}{64000} + \frac{x^3}{16}(400 + \theta x)^{-5/2},$$

för något θ med $0 < \theta < 1$. Slutligen bildar vi $f(x)$:

$$f(x) = g(x^{100}) = 20 + \frac{x^{100}}{40} - \frac{x^{200}}{64000} + \frac{x^{300}}{16}(400 + \theta x^{100})^{-5/2}.$$

Detta är den sökta utvecklingen i Taylorpolynom och restterm.