F18: Integralkalkylens huvudsats. Beräkning av integraler.

3 november 2009

Analysens huvudsats

Vi kommer ihåg att den bestämda integralen $\int_a^b f(x)dx$ definierades m h a översummor och undersummor.

ANALYSENS HUVUDSATS. Om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på det ändliga intervallet $[a, b]$ så är

$$S(x) = \int_a^x f(t)dt$$

(definierad för $a \leq x \leq b$) en primitiv funktion till $f(x)$, dvs

$$S'(x) = f(x).$$

Bevis av analysens huvudsats

Vi ser att

$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt,$$

där vi använder konventionen $\int_a^b = -\int_b^a$ om $h < 0$. Enligt integralkalkylens medelvärdessats blir

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(\xi_h)$$

för någon punkt ξ_h mellan x och $x+h$. Då $h \to 0$ går ξ_h mot x (instängning!). Det följer att $S'(x) = f(x)$. Beviset är klart.

Tillämpningar

Vi observerar att enligt Analysens Huvudsats så har varje kontinuerlig funktion $f(x)$ en primitiv funktion. Detta var kanske inte uppenbart!

OBS! Inte varje kontinuerlig funktion har en derivata! Så att hitta primitiva funktioner är i den meningen lättare!

EXEMPEL. Funktionen

$$S(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

vilken är definierad som gränsvärde av översummor och undersummor blir alltså en primitiv funktion till $f(x)$.

EXEMPEL. Derivera funktionen

$$V(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt.$$

Insättningsformeln

Nu kommer vi fram till ett huvudresultat som låter oss beräkna bestämda integraler med lätthet. Observera att detta är en sats! Alltså INTE hur bestämda integraler definieras!

INSÄTTNINGSFORMELN. Om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ och om $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ så är

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

Tillämpning av insättningsformeln

EXEMPEL. Beräkna arean mellan x-axeln och funktionskurvan

$$y = \frac{x+1}{x+2}, \qquad 1 \leq x \leq 2.$$

Partiell integration. Variabelsubstitution.

Partiell integration:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \left[F(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx.$$

Variabelsubstitution:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\, g'(t)\, dt$$

om $a = g(\alpha)$ och $b = g(\beta)$.