F19: Generaliserade integraler.

5 november 2009

Generaliserade integraler: oändligt intervall

Om vi använder Riemann-integralen med trappfunktioner (med ändligt många steg) på ett oändligt intervall finner vi att vi inte kan räkna ut t ex

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}, \tag{1}$$

eftersom varje översumma ger oändlig area. Men funktionen $m \mapsto 1/x^2$ faller snabbt då x växer mot oändligheten, och det känns rimligt att tilldela integralen ett värde, nämligen

$$\lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{dx}{x^2} = \lim_{X\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^X = \lim_{X\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{X}\right) = 1.$$

När vi gör så tilldelar vi integralen (1) ett värde i *generaliserad Riemann-mening*.

Generaliserade integraler: oändligt intervall (2)

DEFINITION. Den generaliserade Riemann-integralen

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

ges värdet

$$\lim_{X\to+\infty}\int_a^X f(x)\,dx,$$

om detta gränsvärde existerar. I så fall säger vi att integralen är *konvergent*. Om gränsvärdet saknas är integralen *divergent*.

OBS: Motsvarande för integraler över $]-\infty, b[$ samt $]-\infty,+\infty[$.

EXEMPEL. Integralerna

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx, \quad \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}, \quad \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}.$$

Obegränsad integrand

Vi har tidigare observerat att ett obegränsat integrationsintervall är en svårighet för Riemannintegralen. Lika självklart är det ett problem om integranden är obegränsad, eftersom vi överhuvud inte kan hitta några övre eller undre trappfunktioner (ev kan vi finna en av dessa). Vi vill definiera

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

trots att funktionen $f(x)$ är obegränsad nära $x = a$, t ex. Vi antar att funktionen är begränsad och Riemann-integrerbar på varje delintervall $[a + \varepsilon, b]$, där $\varepsilon > 0$.

Obegränsad integrand (2)

DEFINITION. Om gränsvärdet

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx = A$$

finns så säger vi att den generaliserade integralen

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

är *konvergent* med värdet A. Om gränsvärde saknas kallas den generaliserade integralen *divergent*.

OBS: Motsvarande om b är problematisk punkt, eller både a och b är problematiska.

EXEMPEL. Integralerna

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \int_0^1 \ln(x)\, dx.$$

Jämförelsesatser

SATS: Låt I vara ett intervall (begränsat eller obegränsat). Antag att f och g är Riemann-integrerbara på alla kortare begränsade delintervall, och att

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

gäller på I. I så fall är integralen av f konvergent om integralen av g konvergerar.

EXEMPEL: Integralerna

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}e^x}\,dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}e^x}\,dx.$$

Gammafunktionen

Vi har

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$$

som är generaliserad, och konvergerar om $s > 0$. Detta följer ur jämförelsesatsen.