F20: Tillämpningar av integraler.

6 november 2009

EXEMPEL: Arean av ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

EXEMPEL: Arean av mellan kurvorna $y = x$, $y = 2 - x$, och

$$y^2 = 2 - x.$$

Massa

DEFINITION. Om $f(x)$ betecknar tätheten (densiteten) hos ett material längs med x-axeln, så har integralen

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

tolkningen som den samlade massan på intervallet $[a, b]$.

EXEMPEL: En tråd med densitet

$$\varrho(x) = k\sqrt{x(L-x)}, \qquad 0 \leq x \leq L.$$

Vi beräknar trådens massa.

Volymberäkningar

SKIVFORMELN. Låt K vara en tredimensionell kropp vars snittarea är känd för varje plan skärning av kroppen vinkelrätt mot en viss linje. Lägg en x-axel längs med denna linje, och antag $a \leq x \leq b$ för alla punkter på kroppen. Vi betecknar med $A(x)$ arean på snittet som går genom punkten med koordinaten x. Då blir kroppens volym

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

ROTATIONSVOLYMER. Låt kurvan $y = f(x)$, där vi antar att $f(x) \geq 0$, rotera kring x-axeln så att vi får en rotationsyta och en kropp som begränsas av denna yta. Vi skär av kroppen så att $a \leq x \leq b$. Den avskurna kroppen får volymen

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx.$$

Kurvlängd

KURVA PÅ PARAMETERFORM. Vi tänker oss att en kurva ges på parameterform

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)), \qquad t \in [a, b].$$

Härvid tänker vi oss att varje punkt på kurvan genomlöpes endast en gång. Tangentriktningen blir då

$$\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t)),$$

och kurvlängden L ges av

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

ROTATIONSYTORS AREA. Om kurvan

$$y = f(x), \qquad x \in [a, b],$$

där f antas positiv, roteras kring x-axeln, fås en rotationsyta. En betraktelse ger att vi kan dela upp ytan i infinitesimalt små bitar som ser ut som ett cirkulärt band av radie $f(x)$ och bredd

$$\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Bandets area ges som bredden gånger längden, dvs

$$2\pi\, f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx,$$

och alla dessa areor ska läggas ihop, dvs integreras. Vi finner att arean blir

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\, \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$