F21: Integraler och summor.

11 november 2009

Uppskatta summor

EXEMPEL: Vi vill studera

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

för stora positiva heltal n. En gissning skulle vara att jämföra summan med integralen

$$\int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n.$$

Vi skall nu se hur bra en sådan approximation kan visas vara.

Jämförelse av summor med integraler

Antag att funktionen $f(x)$ är avtagande, och (för enkelhets skull) kontinuerlig. Då ser man genom att betrakta en figur med grafen och associerade staplar att

$$\int_1^n f(x)dx + f(n) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)dx + f(1)$$

för $n = 1, 2, 3, \ldots$. En motsvarande uppskattning finns för växande funktioner $f(x)$.

Konvergens av serier

Vi minns att en serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

är **konvergent** om talföljden av delsummor

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

har ett gränsvärde när $n \to \infty$. Gränsvärdet av delsummorna blir seriens **summa**.

Konvergens av positiva serier

Antag nu att alla termer är positiva, dvs att $a_k \geq 0$ för alla k. I så fall blir följden av delsummor $s_0, s_1, s_2, \ldots$ växande. Observera nu följande

FAKTUM. För en växande följd av reella tal gäller ett av följande:
1. Följden konvergerar mot ett reellt tal, eller
2. Följden divergerar mot ∞ (oegentligt gränsvärde).

Detta innebär att en positiv serie antingen konvergerar eller har summan ∞. Av denna anledning skriver man ofta förenklat

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$$

för att ange att en serie med positiva termer konvergerar.

Cauchys integralkriterium

Antag att $f(x)$ är positiv, kontinuerlig, och avtagande på intervallet $x \geq 1$. Då är serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

konvergent om och endast om den generaliserade integralen

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

konvergerar.