F27: Tillämpningar av Taylors formel

1 december 2008

Entydighet i Taylorutvecklingar

Antag att $f(x)$ har utvecklingen

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + x^{n+1} B(x),$$

där funktionen $B(x)$ är begränsad runt $x = 0$. Kan vi då sluta oss till att

$$(2) \qquad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n?$$

Rimligtvis bör vi här anta att f är kontinuerligt deriverbar tillräckligt många gånger. Det visar sig vara så att (2) gäller om f's derivator upp till och med ordning $n+1$ alla är kontinuerliga.

Entydighet i Taylorutvecklingar

Eftersom $f(x)$ antas så snäll så har funktionen en Taylorutveckling kring $x = 0$:

$$(3) \quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

där resttermen har formen

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Vi kombinerar (1) och (3):

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + x^{n+1}B(x) \\ &\qquad = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Entydighet i Taylorutvecklingar

Vi omgrupperar, och får

$$a_0 - f(0) + (a_1 - f'(0))x + \left(a_2 - \frac{f''(0)}{2!}\right)x^2 + \dots \\ + \left(a_n - \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)x^n = R_{n+1}(x) - x^{n+1}B(x).$$

Eftersom $f^{(n+1)}$ är kontinuerlig, gäller att för x nära 0 har vi

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = x^{n+1}B_1(x),$$

där $B_1(x)$ är begränsad nära $x = 0$. Dvs

$$R_{n+1}(x) - x^{n+1}B(x) = x^{n+1}B_2(x),$$

för någon annan begränsad funktion $B_2(x)$.

Entydighet i Taylorutvecklingar

Vi har alltså

$$a_0 - f(0) + (a_1 - f'(0))x + \left(a_2 - \frac{f''(0)}{2!}\right)x^2 + \dots + \left(a_n - \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)x^n = x^{n+1}B_2(x).$$

Stoppar vi in $x = 0$, finner vi att $a_0 = f(0)$. Delar vi sedan den återstående identiteten med x, får vi

$$a_1 - f'(0) + \left(a_2 - \frac{f''(0)}{2!}\right)x + \dots + \left(a_n - \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)x^{n-1} = x^n B_2(x).$$

Entydighet i Taylorutvecklingar

Stoppar vi igen in $x = 0$, finner vi att $a_1 = f'(0)$. Fortsätter vi så här får vi att

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Dvs vi har visat entydigheten.

Tillämpningar

Vi betraktar

$$f(x) = e^{\sin x},$$

och vill Taylorutveckla kring $x = 0$ upp till ordning, säg, 4. Vi har att

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^5 B_1(x),$$

och att

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + y^5 B_2(y),$$

där $B_1(x)$ och $B_2(y)$ är begränsade kring $x = 0$ och $y = 0$. Eftersom

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + x^5 B_3(x), \qquad \sin^3 x = x^3 + x^5 B_4(x),$$

$$\sin^4 x = x^4 + x^5 B_5(x),$$

med $B_3(x)$, $B_4(x)$, och $B_5(x)$ likaså begränsade, så blir

Tillämpningar

$$e^{\sin x} = 1 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{1}{3!}x^4 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + x^5 B_6(x),$$

vilket vi snyggar till lite:

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}x^4 + x^5 B_6(x),$$

Detta är alltså den entydiga Taylorutvecklingen av grad 4.

Tillämpningar av Taylorutveckling

Med hjälp av Taylorutveckling kan vi lätt beräkna gränsvärden som

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

Eftersom

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^5 B(x),$$

där $B(x)$ är begränsad nära $x = 0$, får vi att

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{-\frac{x^3}{3!} + x^5 B(x)}{x^3} = -\frac{1}{3!} + x^2 B(x) \to -\frac{1}{6}$$

då $x \to 0$. (instängning!)

l'Hospitals regel

Antag att vi vill beräkna ett gränsvärde av typen

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

vilket är av typen $[\frac{0}{0}]$, dvs både $f(x) \to 0$ och $g(x) \to 0$ då $x \to 0$. L'Hospitals regel säger att i så fall så gäller – i fall funktionerna är kontinuerligt deriverbara nära $x = 0$ – att

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Vi kan visa detta lätt m h a Taylorutveckling åtminstone ifall att $g'(0) \neq 0$:

l'Hospitals regel

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(0) + f'(0)x + x^2 B_1(x)}{g(0) + g'(0)x + x^2 B_2(x)} = \frac{f'(0)x + x^2 B_1(x)}{g'(0)x + x^2 B_2(x)}$$
$$= \frac{f'(0) + xB_1(x)}{g'(0) + xB_2(x)} \to \frac{f'(0)}{g'(0)}.$$

Om även $\lim f'/g'$ skulle vara av typen $[\frac{0}{0}]$, så tillåter den generella l'Hospitals regel oss att fortsätta derivera upp och nere.