F29: Sammanfattning: Taylors formel

8 december 2009

Maclaurinutveckling

Om funktionen $f(x)$ har $n+1$ kontinuerliga derivator i en omgivning till punkten $x=0$, så har kan vi **Maclaurinutveckla**:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + R_{n+1}(x),$$

där **resttermen** $R_{n+1}(x)$ kan uttryckas på olika sätt.

Maclaurinutveckling

Den **exakta formeln** är

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x (t-x)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

medan Lagranges formulering ger den mer inexakta beskrivningen

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)\, x^{n+1},$$

där θ betecknar något tal mellan 0 och 1. Ibland, t ex vid gränsvärdesberäkningar, räcker det att veta att

$$R_{n+1}(x) = x^{n+1} B(x),$$

där $B(x)$ betecknar en funktion som är begränsad i en omgivning till $x = 0$. Denna senare beskrivning är tillräcklig för entydighet.

Taylorutveckling

Vid Taylorutveckling betraktar vi en omgivning till en annan punkt, säg $x = a$.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x-a),$$

där Lagranges formulering av resttermen ger

$$R_{n+1}(x-a) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1},$$

varvid ξ betecknar någon punkt mellan a och x. Denna formel kallas **Taylors formel**.

Exempel

Många funktioner har kända Maclaurinutvecklingar (och även Taylorutvecklingar kring andra punkter), t ex e^x, $\ln(1+x)$, $\cos x$, $\sin x$, $\arcsin x$, $\arctan x$. Utgående från dessa kan man enkelt få fram Maclaurinutvecklingar för t ex

$$\sin(x^3), \quad \cos(x^5), \quad e^{\sin x}, \quad e^{\cos x}, \quad \ln(\cos x).$$

l'Hospitals regel

Man kan med fördel använda Taylorutveckling vid gränsvärdesberäkning. Men ibland är det bekvämt att istället nytta **l'Hospitals regel**.

Antag att vi vill beräkna ett gränsvärde av typen

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

vilket är av typen $[\frac{0}{0}]$, dvs både $f(x) \to 0$ och $g(x) \to 0$ då $x \to 0$. L'Hospitals regel säger att i så fall så gäller – i fall funktionerna är kontinuerligt deriverbara nära $x = 0$ – att

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beräkning av vissa summor

Vi undrar hur vi ska räkna ut summan

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{\pi^{2k}}{(2k)!}.$$

Vi känner igen summan från Taylorutvecklingen av $\cos x$ med $x = \pi$. I princip sätter vi bara in $x = \pi$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{\pi^{2k}}{(2k)!} = \cos\pi = -1.$$

Kommentar avseende cosinus

Vi vet att

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + R_{2n+2}(x),$$

där resttermen i Lagrange-form blir

$$R_{2n+2}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} \cos(\theta x)\, x^{2n+2}.$$

Eftersom cosinus alltid ligger mellan -1 och 1 ser vi att för fixt x så går resttermen mot noll då $n \to +\infty$. Det innebär att summan konvergerar då $n \to +\infty$, och konvergerar mot $\cos x$.