F3: Mer om funktioner

9 september 2008

Grafritning; rationella funktioner

RATIONELLA FUNKTIONER: En funktion av formen $P(x)/Q(x)$, där P, Q är polynom, sägs vara **rationell**.

Enligt tidigare kan vi skriva om en sådan funktion på formen

$$P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

där P_1, R är polynom, och R har lägre grad än Q. Vi bör dessutom faktorisera nämnaren Q.

EXEMPEL: Rita funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

EXEMPEL: Rita funktionen

$$f(x) = \frac{-x^3+1}{x^2-1}.$$

Heltalspotenser och rötter

HELTALSPOTENSER: Vi definierar, för reella x, x^n för heltal $n \geq 0$ genom att sätta $x^0 = 1$ samt $x^{n+1} = x \cdot x^n$. Om $n < 0$ skriver vi istället

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Vi finner att

$$(POT) \qquad x^m x^n = x^{m+n}, \quad (x^m)^n = x^{mn}, \quad (xy)^n = x^n y^n.$$

Vi vill utvidga potensbegreppet till reella potenser istället för

heltalspotenser. Det är viktigt att bevara egenskaperna (POT).

n:e RÖTTER: Vi betraktar ekvationen $y^n = x$. Om n är udda, finns till varje reellt x exakt ett x, som vi skriver som $y = x^{1/n}$. Om n är udda och $x \geq 0$ finns i allmänhet två rötter, en positiv och en negativ. Vi väljer den positiva och skriver som tidigare $y = x^{1/n}$.

Potensfunktionen

RATIONELLA POTENSER: Om t är ett rationellt tal, dvs $t = m/n$ där m, n är heltal och $n > 0$, kan vi definiera, för positiva x,

$$x^t = \left(x^{1/n}\right)^m.$$

Man visar lätt att räknelagarna (POT) gäller också för rationella exponenter.

REELLA POTENSER: Om vi vill beräkna x^t för ett reellt tal t, kan vi tänka oss att approximera t med ett rationellt tal t_r, beräkna x^{t_r}, och sedan låta t_r närma sig t. Förhoppningsvis får vi ett vettigt begrepp.

Exponentialfunktionen

EXPONENTIALFUNKTIONEN: Vi kallar funktionen

$$f(t) = x^t$$

där vi håller $x > 0$ fixt för exponentialfunktionen med bas x. Om $x > 1$ blir $f(t)$ växande, och om $x < 1$ blir $f(t)$ avtagande. Det finns ett speciellt tal e,

$$e = 2.71828\ldots,$$

så att

$$f(t) = e^t$$

blir speciellt intressant.

SATS. Antag att $a > 1$. Då gäller att

$$\frac{a^t}{t^b} \to +\infty$$

då $t \to +\infty$ oberoende av värdet på konstanten b.

LOGARITMER. Vi försöker lösa ekvationen

$$a^t = s.$$

Om $a = 1$ kan denna bara lösas för $s = 1$, medan om $0 < a < 1$ eller $1 < a < +\infty$ så finns en entydig lösning, som vi skriver som

$$t = {}^a\log s.$$

Det räcker att titta på $a > 1$, eftersom

$${}^{1/a}\log s = -{}^a\log s.$$

Logaritmen med bas $e = 2.718\ldots$ skriver vi

$$\ln = {}^e\log.$$

Växande funktioner

DEFINITION. Funktionen f är växande om

$$t_1 < t_2 \implies f(t_1) \leq f(t_2).$$

Funktionen är strängt växande om

$$t_1 < t_2 \implies f(t_1) < f(t_2).$$

Motsvarande begrepp "avtagande" och "strängt avtagande" finns också.

OBS: En strängt växande eller strängt avtagande funktion är injektiv, så vi kan bilda inversfunktionen.

Begränsade funktioner

DEFINITION. Funktionen f är uppåt begränsad om det finns ett tal B så att

$$f(x) \leq B$$

för alla x i definitionsmängden. På motsvarande vis definierar vi en nedåt begränsad funktion. En funktion är begränsad om den är uppåt och nedåt begränsad.

Jämna och udda funktioner

DEFINITION. En funktion f är jämn om $f(x) = f(-x)$. En funktion f är udda om $f(x) = -f(-x)$.

Sammansättningar

Vi bildar

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

under förutsättning att högersidan är väldefinierad. Detta kallas den sammansatta funktionen (av f och g).

EXEMPEL: $f(x) = e^{x^2}$.