F7: Introduktion till derivatan

23 september 2008

Begreppet derivata

FÖRÄNDRING: Om $f(x)$ är en funktion, kan vi tänka på den som en storhet som ändras med variabeln x (som t ex kan beteckna tiden). Det är naturligt att försöka studera storhetens förändring då x flyttas lite grand. Från x_0 till $x_0 + h$ blir föändringen

$$f(x_0 + h) - f(x_0). \tag{1}$$

Om $f(x)$ är kontinuerlig kommer uttrycket (1) att gå mot 0 då $h \to 0$, så det gränsvärdet är inte intressant. För att få ett uttryck med bättre chans att ha ett intressant gränsvärde bildar vi istället

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{2}$$

DEFINITION: Derivatan till $f(x)$ i punkten $x = x_0$ är gränsvärdet

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Exempel på derivator

EXEMPEL: Beräkna $f'(x_0)$ för (a) $f(x) = x^2$, (b) $f(x) = \sqrt{x}$, (c) $f(x) = e^x$, (d) $f(x) = \ln x$.

Deriverbarhet

DEFINITION: Om gränsvärdet $f'(x_0)$ finns säger vi att funktionen $f(x)$ är deriverbar i $x = x_0$. Om funktionen är deriverbar i varje punkt på ett intervall I, säger vi att funktionen är deriverbar på I.

SATS 1: En deriverbar funktion är kontinuerlig.

Räkneregler för derivatan

SATS 2: Låt f och g vara två deriverbara funktioner, och α en konstant. Då gäller att αf, $f+g$, fg, och f/g är deriverbara i sina definitionsmängder, och dessutom har vi:

$$(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x),$$

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x),$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

$$(f/g)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Kedjeregeln

SATS 3: Om g är deriverbar i punkten x_0 och $f(t)$ deriverbar i punkten $t = g(x_0)$, så är funktionen $h(x) = f(g(x))$ deriverbar i $x = x_0$. Dessutom gäller att

$$h'(x) = f'(g(x))\, g'(x).$$

EXEMPEL: Derivera funktionen $f(x) = (x^3 + x)^{100}$.

Derivata av invers funktion

Invers funktion: erinrar oss att

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

om f är inverterbar.

SATS 4: Om f är inverterbar (med f^{-1} kontinuerlig) och om f är deriverbar i x med $f'(x) \neq 0$, så är f^{-1} deriverbar i $y = f(x)$, och dessutom gäller att

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$