Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra, SF1604, den 12 juni 2012 kl 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden.

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Den som har b bonuspoäng från läsåret 2011–2012 får använda högst fem av dessa poäng för att uppnå maximalt 15 poäng på del I. Till poängsumman på del II och del III adderas sedan det största av talen $b-5$ och 0.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

DEL I

1. (ON-system) Punkterna $P = (1, 1, -1)$, $Q = (2, 1, 3)$ och $R = (0, 3, 2)$ ligger i ett plan π.
   (a) (2p) Bestäm ekvationen för planet π.
   (b) (1p) Visa att varken punkten $S = (1, 1, 1)$ eller punkten $T = (3, 3, 3)$ tillhör planet π.
   (c) (2p) Avgör om punkterna S och T ligger på samma sida eller på olika sidor om planet π.

2. Låt a och b beteckna reella tal och låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ beteckna nedanstående matris

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 2 & b \\ 3 & b \end{pmatrix}$$

   (a) (2p) Om $a \neq 2$ så är matrisekvationen $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ lösbar för varje värde på talet b. Förklara varför.
   (b) (3p) Ange samtliga lösningar till matrisekvationen $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ om $b = 0$ och $a = 2$.

3. Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{v}$ beteckna matriserna

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 17 & -12 \\ 24 & -17 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) (2p) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen $\mathbf{A}$.

   (b) (2p) Bestäm $\mathbf{A}^{99}\mathbf{v}$.

   (c) (1p) Bestäm $\mathbf{A}^{100}$.

DEL II

4. (5p) (ON-system) Bestäm en ortogonalbas för nollrummet till matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Utvidga sedan denna bas till en ortogonalbas för R^4.

5. (5p) Betrakta tretipplarna $\bar{u} = (1,2,1)$, $\bar{v} = (1,3,2)$ och $\bar{w} = (1,4,4)$ i vektorrummt R^3. Om dessa tre vektorer har koordinaterna $\bar{u} = (2,2,1)_{\mathcal{B}}$, $\bar{v} = (1,3,1)_{\mathcal{B}}$ och $\bar{w} = (1,4,1)_{\mathcal{B}}$ i en bas $\mathcal{B}$ för R^3, vad har då vektorn $\bar{z} = (3,2,1)$ för koordinater i basen $\mathcal{B}$.

6. (5p) Låt $\mathcal{P}$ beteckna det vektorrum som består av alla polynom med reella koefficienter och med sedvanlig polynomaddition och multiplikation med skalär som operationer. Låt D beteckna den linjära avbildning som ges av derivering, t ex så är $(D-I)p(t) = p'(t) - p(t)$. Beskriv, för varje naturligt tal $n = 0,1,2,\ldots$, kärna och värderum (bildrum) till den linjära avbildningen $D^n(D-I)$ från $\mathcal{P}$ till $\mathcal{P}$.

DEL III (Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigtvis ordagrant, där de används i lösningen.)

7. Låt, för $n = 1,2,3,\ldots$, $p_n(z)$ beteckna polynomet $p_n(z) = z^n + z^{n-1} + \cdots + z + 1$.

   (a) (2p) Visa att samtliga nollställen till polynomen $p_2(z)$ och $p_3(z)$ har beloppet ett.

   (b) (1p) Bestäm antalet faktorer av grad 1 som uppstår vid en faktorisering av polynomet $p_n(z)$ i irreducibla och reella första- och andragradsfaktorer.

   (c) (2p) Antag att $az^2 + bz + c$, där a, b och c är reella tal, delar polynomet $p_n(z)$. Undersök om det finns något samband mellan talen a och c.

8. (5p) (ON-system) Bestäm samtliga plan π, som innehåller origo och är parallellt med vektorn $(1,-1,0)$, och till vilka det finns en 3×3-matris $\mathbf{S}_\pi$ sådan att $\mathbf{S}_\pi$ beskriver spegling i planet π och har ett matriselementet i rad ett och kolonn ett som är lika med $s_{11} = 1/3$, dvs,

$$\mathbf{S}_\pi = \begin{pmatrix} 1/3 & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{pmatrix},$$

   där $\star$ betecknar reella tal som du får ta reda på själv.