Matematiska Institutionen,
KTH

Problem till övning nr 10 den 27 februari, Linjär algebra D1, SF1604, vt 12.

1. För den linjära avbildningen A från R^3 till R^3 gäller att
$$A(2,3,4) = (0,1,1), \qquad A(3,4,5) = (2,-1,0), \qquad A(4,5,6) = (1,1,2).$$
Bestäm den inversa avbildningens matris relativt standardbasen.

2. Låt P vara projektion på planet $x-y=0$ och S spegling i planet $z=0$. Bestäm matriserna relativt standardbasen för de sammansatta avbildningarna $S \circ P$ resp $P \circ S$.

3. Låt A vara en linjär avbildning från R^4 till R^3 med kärnan $\ker(A) = \mathrm{span}\{(1,2,3,-1)\}$. Är A surjektiv?

4. Bildrummet $\mathrm{im}(A)$ till den linjära avbildningen A från R^4 till R^3 är
$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{span}\{(1,1,1),(2,1,a),(1,2,a)\}.$$
Bestäm för olika värden på a dimensionen hos A:s kärna.

5. Derivering D är en linjär avbildning av vektorrummet $\mathcal{P}$ bestående av alla polynom (med reella koefficienter). Bestäm D:s kärna. Är D surjektiv?

6. Antag att A är en surjektiv linjär avbildning från vektorrummet U till vektorrummet W och B en linjär avbildning från V till vektorrummet U. Kan den sammansatta avbildningen $A \circ B$ från V till W vara surjektiv även om B inte är surjektiv?

7. Betrakta matriserna
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Visa att det inte finns någon matris $\mathbf{T}$ sådan att $\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{T}^{-1}$.

8. Låt $\mathbf{A}$ beteckna nedanstående matris
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & -6 & 3 \\ 4 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$
Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till $\mathbf{A}$. Diagonalisera matrisen $\mathbf{A}$, Bestäm $\mathbf{A}^{1023}$ samt bestäm
$$\mathbf{A}^{366}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

9. Vektorerna $\bar{u} = (1,0,1)$, $\bar{v} = (0,2,-3)$ och $\bar{w} = (2,1,0)$ är egenvektorer till matrisen $\mathbf{A}$ hörande till egenvärdena $\lambda = 2$, $\lambda = 0$ och $\lambda = 1$, respektive. Bestäm matrisen $\mathbf{A}$, samt bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen $\mathbf{A}^5$.

10. Bestäm samtliga egenvärden med tillhörande egenrum till matrisen
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Bestäm också $\mathbf{A}^n$ för $n = 2,3,4,\ldots$.

11. Kan en kvadratisk matris vara inverterbar om ett av matrisens egenvärden är lika med 0?

12. **Fler övningar finns i läroboken. Se förslag i kursPM. Övning ger färdighet.**

SVAR

1.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & -3 \\ -2 & -9 & 13 \end{pmatrix}$$

2. Både $P \circ S$ och $S \circ P$ beskrivs i standardbasen av matrisen

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Ja.

4. Med $a = 3/2$ så är dimensionen hos A:s kärna lika med 1. För alla andra värden på a har A:s kärna dimensionen 0.

5. D är surjektiv och $\ker(D) = \text{span}\{1\}$.

6. Ja.

7. –

8. Egenvärden är $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ och $\lambda = -1$, med tillhörande egenrum $E_0 = \text{span}\{(0,1,2)\}$, $E_1 = \text{span}\{(1,2,4)\}$ och $E_{-1} = \text{span}\{(1,1,1)\}$. Med

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

så har $\mathbf{A}$ diagonaliseringen $\mathbf{A} = \mathbf{TDT}^{-1}$. Vidare är $\mathbf{A}^{1023} = \mathbf{A}$ samt

$$\mathbf{A}^{366} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

9.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \\ -6 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

Matrisen $\mathbf{A}^5$ har egenvärdena $\lambda = 32$, $\lambda = 0$ och $\lambda = 1$ med tillhörande egenrum $E_{32} = \text{span}\{(1,0,1)\}$, $E_0 = \text{span}\{(0,2,-3)\}$ resp $E_1 = \text{span}\{(2,1,0)\}$.

10. Enda egenvärdet är $\lambda = 0$ med tillhörande egenrum $E_0 = \text{span}\{(1,0,0)\}$

11. Nej.