Matematiska Institutionen,
KTH

Problem till övning nr 11 den 1 mars, Linjär algebra D1, SF1604, vt 12.

1. Genomför en ortogonal diagonalisering av matrisen

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Vektorerna $(1,1,2)$ och $(0,1,1)$ är egenvektorer till den symmetriska matrisen $\mathbf{A}$. Egenvektorn $(1,1,2)$ hör till egenvärdet $\lambda = 1$ och matrisen $\mathbf{A}$:s determinant är lika med $\det(\mathbf{A}) = 2$. Bestäm

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Vilka av följande kvadratiska former är positivt definita?
   (a) $Q_1(x,y) = x^2 + y^2$.
   (b) $Q_2(x,y,z) = x^2 + y^2$.
   (c) $Q_3(x,y,z) = 0.0001xy + 100z^2$.

4. För vilka värden på parametern a är

$$Q(x,y,z) = (x+y+z)^2 + (2x+y+3z)^2 + (y+az)^2,$$

   en positivt definit kvadratisk form.

5. Använd lösningen av övning 1 för att hitta en koordinattransformation som överför nedanstående kvadratiska form på huvudaxelform

$$Q(x,y,z) = 5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 10xy - 4xz + 4yz.$$

   Är den kvadratiska formen positivt definit?

6. Beskriv geometrisk de punkter (x,y,z) i den vanliga 3-dimensionella rymden som satisfierar ekvationen

$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 10xy - 4xz + 4yz = 1.$$

7. **Fler övningar finns i läroboken. Se förslag i kursPM. Övning ger färdighet.**

SVAR

1. Med **D** och **Q** enligt nedan

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

så är **Q** en ortogonalmatris och $\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^T$ en ortogonal diagonalisering av **A**.

2. $(13/3 \quad 10/3 \quad -1/3)^T$.

3. $Q_1(x, y)$.

4. $a \neq -1$.

5. Med

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

så

$$Q(x, y, z) = 5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 10xy - 4xz + 4yz = 6y'^2 + 12z'^2$$

som är en positivt semidefinit kvadratisk form. Den givna kvadratiska formen är inte positivt definit.

6. En elliptisk cylinder. Cylinderaxel är linjen $(x, y, z) = t(1, 1, 0)$. Övriga huvudaxlar är linjerna $(x, y, z) = t(1, -1, 2)$ och $(x, y, z) = t(1, -1, -1)$.