Matematiska Institutionen, KTH

Problem till övning nr 12 den 6 mars, Linjär algebra D1, SF1604, vt 12.

0. Uppgifter på induktion enligt separat blad, som delas ut den 5 mars.

1. Visa att vektorerna $\bar{e}_1 = (1, 2, 1, 1)$, $\bar{e}_2 = (1, 1, a, 1)$, $\bar{e}_3 = (2, 3, 2, 0)$ och $\bar{e}_4 = (2, 1, 0, 0)$ för $a \neq 0$ bildar en bas för R^4. Bestäm koordinaterna för vektorn $(1, 2, 3, 4)$ i denna bas när $a = 1$.

2. (ON-system) Bestäm ekvationen för ett plan π_2 genom punkten $P = (1, 1, 1)$ och parallellt med planet π_1 med ekvationen $x + 2y + 2z = -4$. Bestäm avståndet mellan planen samt bestäm den punkt i π_1 som ligger närmast punkten P.

3. Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Kan matrisen diagonaliseras? I sådana fall, genomför en diagonalisering!

---

4. (ON-system) Bestäm projektionen av vektorn $(1\ \ 2\ \ 1\ \ 2)$ på radrummet till matrisen
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

5. För den linjära avbildningen A från R^3 till R^3 gäller att
$$A(1, 1, 2) = (2, 0, 1), \quad A(1, 0, -1) = (1, 2, 3), \quad A(0, 0, 1) = (1, 1, 0).$$
Undersök om det finns vektorer $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, $\bar{f}_3$ sådana att
$$A\bar{f}_1 = (1, 0, 0), \quad A\bar{f}_2 = (0, 1, 0), \quad A\bar{f}_3 = (0, 0, 1),$$
och bestäm i så fall samtliga sådana vektorer $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ och $\bar{f}_3$.

6. Är produkten av två ortogonalmatriser av samma format alltid en ortogonalmatris? Om du anser att svaret är ja skall du bevisa detta. Om du anser att svaret är nej skall du ge ett motexempel.

---

7. (a) Bestäm en 2×2-matris $\mathbf{A}$ vars nollrum och kolonnrum överensstämmer.
   (b) Visa att en det inte finns någon 3×3-matris med ovanstående egenskap.
   (c) Föreslå, med motivering, ett generellt påstående om matriser i allmänhet, relaterat till uppgifterna (a) och (b) ovan. (Du behöver inte bevisa ditt påstående för att få två poäng på denna deluppgift, men antalet poäng beror på svarets kvalité i övrigt.)

8. Avgör om nedanstående information räcker för att bestämma matrisen $\mathbf{A}$ entydigt:
   (i) $\mathbf{A}$ är symmetrisk.
   (ii) $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (5 - \lambda)(2 - \lambda)^2$
   (iii) Vektorn $(1\ \ 1\ \ 1)^T$ är en egenvektor till matrisen $\mathbf{A}$ hörande till egenvärdet 5.

   Om svaret är att informationen ovan räcker för att bestämma matrisen $\mathbf{A}$ skall $\mathbf{A}$ bestämmas, om svaret är att informationen inte räcker skall ovanstående tre villkor kompletteras med ett ytterligare villkor som gör matrisen $\mathbf{A}$ entydigt bestämd och därefter skall matrisen $\mathbf{A}$ bestämmas. (Kvalitén i dina motiveringar och hur din lösning presenteras är avgörande för antalet poäng du kommer att få på uppgiften.)