Matematiska Institutionen,
KTH

Problem på induktion, samt några svar, till övning nr 12 den 6 mars, Linjär algebra D1, SF1604, vt 12.

0. (a) Visa med ett induktionsbevis att formeln

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

är giltig för talen $k = 0, 1, 2, \ldots$.

(b) Visa med ett induktionsbevis att talet 8 delar $7^{2n+1} + 5^{2n}$ för alla tal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(c) En följd av tal $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ definieras rekursivt genom sambandet

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$$

för $n = 2, 3, 4, \ldots$ samt av att $a_0 = 5$ och $a_1 = 0$. Visa med ett induktionsbevis att

$$a_n = 3(-2)^n + 2 \cdot 3^n$$

för $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

SVAR

0. –
1. $\frac{1}{2}(1, 7, -1, -2)$
2. $x + 2y + 2z = 5$, avstånd 3, närmaste punkt är $(0, -1, -1)$.
3.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

4. $\frac{1}{27}(31, 51, 26, 55)$
5. $\bar{f}_1 = \frac{1}{7}(2, 3, 9)$, $\bar{f}_2 = \frac{1}{7}(-2, -3, -2)$, och $\bar{f}_3 = \frac{1}{7}(3, 1, -4)$
6. Ja
7. (a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) –

(c)

8.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$