Matematiska Institutionen, KTH

Problem till övning nr 3 den 24 januari, Linjär algebra D1, SF1604, vt 12.

1. Bestäm ett tal a sådant att vektorn $(1,1,a)$ blir en så kallad linjärkombination av vektorerna $(1,-1,3)$ och $(2,1,0)$, dvs bestäm ett tal a så att det finns reella tal λ_1 och λ_2 sådana att

$$(1,1,a) = \lambda_1(1,-1,3) + \lambda_2(2,1,0).$$

2. Visa att punkterna $(1,3,2)$, $(2,1,0)$ och $(3,-1,-2)$ ligger i rät linje, till exempel genom att jämföra vektorerna mellan dessa punkter.

3. Låt $\bar{u} = (1,1,-1)$ och $\bar{v} = (2,3,1)$ samt antag att vekorn $\bar{w}$ är sådan att $\bar{v} \cdot \bar{w} = -2$ och att vektorerna $\bar{u}$ och $\bar{w}$ är vinkelräta mot varandra, $\bar{u} \perp \bar{w}$. Bestäm

$$\bar{u} \cdot \bar{v}, \qquad \bar{v} \cdot \bar{u}, \qquad (\bar{u} + 2\bar{v}) \cdot (3\bar{v} - 5\bar{w}), \qquad ||\bar{u}||,$$

samt cosinus för vinkeln mellan vektorerna $\bar{u}$ och $\bar{v}$.

4. Visa att triangeln med hörn i punkterna $(1,2,1)$, $(2,3,1)$ och $(2,1,1)$ är rätvinklig. Bestäm samtliga vinklar, triangelns omkrets och area.

5. Låt $\bar{u} = (2,3,-1)$ och $\bar{v} = (2,1,1)$. Bestäm längden av projektionen av vektorn $\bar{u}$ på vektorn $\bar{v}$.

6. En rät linje ℓ innehåller punkterna $P = (1,0,-1)$ och $Q = (1,2,4)$. Bestäm en parameterform för linjen. Avgör om punkten $(1,-2,-6)$ tillhör linjen. Bestäm den punkt på linjen som ligger mitt emellan punkterna P och Q.

7. Låt $\bar{u} = (0,1,2)$ och $\bar{v} = (1,-1,-2)$. Antag att $\bar{v} \times \bar{w} = (3,1,1)$. Bestäm

$$\bar{u} \times \bar{v}, \qquad \bar{w} \times \bar{v}, \qquad \bar{w} \times \bar{w}, \qquad (3\bar{u} - 7\bar{w}) \times \bar{v}, \qquad \bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w})$$

Räcker den givna informationen för att bestämma $(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w}$ och $\bar{w} \times (\bar{v} \times \bar{w})$. Finns det någon vektor $\bar{z}$ sådan att $\bar{v} \times \bar{z} = (2,2,1)$.

8. Bestäm arean av den triangel som har hörn i punkterna $(1,1,0)$, $(0,1,2)$ and $(1,3,1)$.

9. Ett plan π innehåller punkterna $R = (1,1,1)$, $S = (2,3,0)$ och $T = (0,1,2)$. Bestäm en normal till planet π. Bestäm planets ekvation. Avgör om punkten $(3,2,1)$ tillhör planet. Bestäm ytterligare tre punkter i planet.

10. Bestäm skärningspunkten mellan linjen ℓ i uppgift 6 och planet π i uppgift 9.

11. Undersök om det går att hitta ett tal a sådant att punkterna $(2,1,0)$, $(0,1,1)$, $(-1,2,2)$ och $(3,2,a)$ ligger i samma plan.

12. Låt $\bar{u} = (x_1,x_2,x_3)$, $\bar{v} = (y_1,y_2,y_3)$ och $\bar{u} \times \bar{v} = (z_1,z_2,z_3)$. Visa att

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

om och endast om vektorerna $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är parallella.

13. **Fler övningar finns i läroboken. Se förslag i kursPM. Övning ger färdighet.**

SVAR

1. $a = -1$
2. –
3. $\bar{u} \cdot \bar{v} = 4,\ \bar{v} \cdot \bar{u} = 4,\ (\bar{u} + 2\bar{v}) \cdot (3\bar{v} - 5\bar{w}) = 116,\ ||\bar{u}|| = \sqrt{3}$. Cosinus för vinkeln mellan vektorerna $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är $4/\sqrt{42}$.
4. Vinlarna är $\pi/2$, $\pi/4$ och $\pi/4$. Två sidor har längden $\sqrt{2}$ och en sida har längden 2. Arean är lika med 1.
5. $\sqrt{6}$
6. Parameterform $(x, y, z) = (1, 2, 4) + t(0, 2, 5)$. Mittpunkt är $(1, 1, 3/2)$. Ja, den givna punkten tillhör linjen.
7. $\bar{u} \times \bar{v} = (0, 2, -1),\ \bar{w} \times \bar{v} = (-3, -1, -1),\ \bar{w} \times \bar{w} = (0, 0, 0),\ (3\bar{u} - 7\bar{w}) \times \bar{v} = (21, 13, 4),\ \bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = (-1, 6, -3)$. Den givna informationen räcker varken för att bestämma $(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w}$ eller $\bar{w} \times (\bar{v} \times \bar{w})$. Finns ingen vektor $\bar{z}$ sådan att $\bar{v} \times \bar{z} = (2, 1, 1)$.
8. $\frac{1}{2}\sqrt{21}$
9. Normal $(1, 0, 1)$. Planets ekvation $(x - 1) + 0(y - 1) + (z - 1) = 0$ eller hyfsad $x + z = 2$. Punkten $(3, 2, 1)$ tillhör inte planet. Men t ex punkterna $(2, 0, 0)$, $(2, 7, 0)$ och $(3, -13, -1)$ gör det.
10. $(1, 4/5, 1)$.
11. $a = 0$.
12. –