Matematiska Institutionen,
KTH

Problem till övning nr 5 den 2 februari, Linjär algebra D1, SF1604, vt 12.

1. Undersök om $\bar{u} = (3, 1, 1, 1)$ tillhör det delrum L till R^4 som spänns upp av vektorerna $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 2, 1)$ och $(1, 1, 1, 1)$, med andra ord om $\bar{u}$ tillhör det linjära höljet
$$L = \text{span}\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 2, 1), (1, 1, 1, 1)\}.$$
Om svaret är ja, skriv då $\bar{u}$ som en linjärkombination av 4-tipplarna $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 2, 1)$ och $(1, 1, 1, 1)$.

2. Visa att vektorerna $\bar{u} = (1, 0, -3)$, $\bar{v} = (1, -2, 1)$ och $\bar{w} = (0, 1, -2)$ är tre linjärt beroende vektorer i R^3. Gör en geometrisk beskrivning av detta faktum och skriv $\bar{u}$ som en linjärkombination av $\bar{v}$ och $\bar{w}$. Kan $\bar{v}$ skrivas som en linjärkombination av $\bar{u}$ och $\bar{w}$?

3. Visa att vektorerna $\bar{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\bar{e}_2 = (1, 2, 3)$ och $\bar{e}_3 = (1, 3, 2)$ bildar en bas för R^3. Bestäm koordinaterna för vektorerna $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ och $\bar{e}_3$ samt vektorn $\bar{u} = (3, 6, 0)$ i denna bas.

4. Mängden av alla lösningar till det homogena linjära ekvationssystemet
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$
bildar ett delrum L till R^4. Bestäm en bas för detta delrum L samt ange dimensionen av delrummet L. Ange även tre vektorer i R^4 som inte tillhör L.

5. Mängden av alla 4-tipplar (x_1, x_2, x_3, x_4) som satisfierar ekvationen
$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0$$
bildar ett delrum L till R^4 som har dimension 3. Bestäm en bas $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ för L. Bestäm sedan en fjärde vektor $\bar{e}_4$ sådan att $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ och $\bar{e}_4$ bildar en bas för R^4.

6. Visa att mängden av alla 4-tipplar (x_1, x_2, x_3, x_4) som satisfierar ekvationen
$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1$$
INTE bildar ett delrum till R^4.

7. Bestäm samtliga värden på parametern a för vilka de fyra vektorerna $(1, 1, 1, 1)$,$(1, -1, 1, -1)$, $(1, 2, 3, 4)$ och $(0, 1, -1, a)$ blir linjärt beroende. Gör en geometrisk tolkning av situationen.

8. Om L och M är två delrum till vektorrummet V så utgör mängden av vektorer som tillhör både L och M ett delrum till V, som betecknas $L \cap M$ och som man kallar snittet av L och M. Bestäm nu två 3-dimensionella delrum L och M till R^4 sådana att $(1, 1, 1, 1)$ tillhör $L \cap M$ samt
$$\dim(L \cap M) = 2.$$

9. Visa att mängden av alla oändliga talföljder $\bar{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ utgör ett vektorrum V över de reella talen om addition av vektorer och multiplikation av en vektor med ett reellt tal λ definieras
$$(x_0, x_1, x_2, \ldots) + (y_0, y_1, y_2, \ldots) = (x_0 + y_0, x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$$
resp
$$\lambda(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2, \ldots).$$
Låt L beteckna mängden av alla talföljder $\bar{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ sådana att talen i talföljden efter ett tag samtliga blir noll, dvs mer precist, till varje sådan vektor $\bar{x}$ finns ett tal $N_{\bar{x}}$ sådant att $x_i = 0$ för alla $i \geq N_{\bar{x}}$. Är L ett delrum till vektorrummet V.

10. **Fler övningar finns i läroboken. Se förslag i kursPM. Övning ger färdighet.**

SVAR

1. $(3,1,1,1) = (1,0,1,0) - (0,1,2,1) + 2(1,1,1,1)$.

2. $\bar{u} = \bar{v} + 2\bar{w}$. Ja, $\bar{v} = \bar{u} - 2\bar{w}$.

3. $\bar{e}_1$ har koordinaterna $(1,0,0)$, $\bar{e}_2$ har koordinaterna $(0,1,0)$ och $\bar{e}_3$ har koordinaterna $(0,0,1)$ i basen $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$. Vektorn $(3,6,0)$ har koordinaterna $(3,-3,3)$ i denna bas.

4. Till exempel bildar $(-9,4,1,0)$ och $(-3,2,0,1)$ en bas så $\dim(L) = 2$. Till exempel vektorerna $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$ och $(0,0,1,0)$ tillhör inte L

5. Till exempel $\bar{e}_1 = (-4,0,0,1)$, $\bar{e}_2 = (-2,0,1,0)$, $\bar{e}_3 = (3,1,0,0)$. Som $\bar{e}_4$ t ex $\bar{e}_4 = (1,0,0,0)$

6. –

7. $a = 0$.

8. –

9. –