

Matematiska Institutionen,
KTH

Problem till övning nr 6 den 7 februari, Linjär algebra D1, SF1604, vt 12.

1. Låt \mathbf{A} vara matrisen nedan

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestäm baser för matrisens radrum, kolonnrum och nollrum, samt bestäm matrisens rang.

2. Låt \mathbf{A} vara matrisen nedan

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 9 & a \\ 1 & -1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Bestäm för varje värde på parametern a rangen hos matrisen \mathbf{A} .

3. För kvadratiske matrisen \mathbf{A} , dvs $n \times n$ -matrisen \mathbf{A} , gäller att \mathbf{A} har full rang, dvs $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$, om och endast om ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ har en unik lösning för varje högerled \mathbf{b} . Använd detta för att visa att om \mathbf{A} och \mathbf{B} är kvadratiske matriser så har produkten \mathbf{AB} full rang om och endast om både \mathbf{A} och \mathbf{B} har full rang. Visa att om \mathbf{A} har full rang och \mathbf{B} rang $n - 1$ så har \mathbf{AB} rang $n - 1$. Ge exempel på två 3×3 -matriser \mathbf{A} och \mathbf{B} , båda med rang 3, men sådana att

$$\text{rang}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 1.$$

4. Visa att om för matriserna \mathbf{A} och \mathbf{B} gäller att $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ så är \mathbf{B} 's kolonnrum ett delrum till \mathbf{A} 's nollrum.
5. Antag att L och M är delrum till vektorrummet V .
- (a) Visa att snittet $L \cap M$ av L och M , (dvs mängden av de vektorer som tillhör både L och M), också är ett delrum till V .
- (b) Visa att om $\dim(V) = n$, $\dim(L) = k$ och $\dim(M) = m$ så är

$$\dim(L \cap M) \geq (k + m) - n.$$

6. Fler övningar finns i läroboken. Se förslag i kursPM. Övning ger färdighet.

SVAR

1. Bas för radrummet är t ex de två vektorerna $\bar{r} = (1 \ 0 \ -2 \ 1 \ 0)$ och $\bar{r}' = (0 \ 1 \ -3 \ 1 \ -1)$.
Bas för kolonnrummet är t ex de två kolonnerna

$$\bar{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \bar{k}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bas för nollrummet är t ex de tre vektorerna

$$\bar{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \bar{n}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrisens rang är 2.

2. Rangén är 3 när $a = 0$ eller $a = 4$. För övrigt är rangén 4.
3. –
4. –
5. –