Matematiska Institutionen,
KTH

Problem till övning nr 7 den 13 februari, Linjär algebra D1, SF1604, vt 12.

1. (ON-system) En triangel i R^4 har hörn i punkterna $(3, 0, 1, 0)$, $(0, -1, 0, 3)$ och origo. Visa att triangeln är rätvinklig. Bestäm triangelns samtliga vinklar, omkrets och area.

2. I R^3 inför vi den inre produkten

$$\langle \bar{x} \mid \bar{y} \rangle = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 2x_3y_3 \qquad \text{där} \qquad \bar{x} = (x_1, x_2, x_3),\ \ \bar{y} = (y_1, y_2, y_3).$$

   Låt $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ och $\bar{e}_3$ vara standardbasen i R^3. Bestäm längden av dessa basvektorer. Är $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ och $\bar{e}_3$ parvis ortogonala. Bestäm en ON-bas i det inre produktrum som definieras av denna inre produkt.

3. (ON-system) Betrakta delrummet $L = \text{span}\{(1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0)\}$ till R^4.
   (a) Bestäm ortogonala komplementet $L^{\perp}$ till L i R^4.
   (b) Bestäm en ortogonalbas i L och en ortogonalbas i $L^{\perp}$.
   (c) Bestäm projektionen av vektorn $(1, 2, 3, 4)$ på L.
   (d) Använd lösningen till föregående deluppgift för att bestämma projektionen av $(1, 2, 3, 4)$ på $L^{\perp}$.
   (e) Skriv $(1, 2, 3, 4)$ som en summa av en vektor i L och en vektor i $L^{\perp}$.

4. I det vektorrum, som består av alla funktioner som är kontinuerliga på intervallet $[-1, 1]$, definierar vi en inre produkt genom

$$\langle f(t) \mid g(t) \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\ \text{dt}.$$

   Visa att polynomen $p(t) = 1 - 3t^2$ och $q(t) = 2t$ är ortogonala mot varandra. Bestäm också $||q(t)||$. Låt $L = \text{span}\{1 - 3t^2, t\}$. Bestäm projektionen av funktionen $f(t) = 1$ på L.

5. **Fler övningar finns i läroboken. Se förslag i kursPM. Övning ger färdighet.**

SVAR

1. $\sqrt{10}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{20}$, $\pi/4$, $\pi/4$, $\pi/2$.

2. $||\bar{e}_1|| = 1$, $||\bar{e}_2|| = 5$, $||\bar{e}_3|| = 2$. De är parvis ortogonala. En ON-bas ges av $\bar{e}_1$, $0.2\bar{e}_2$, $0.5\bar{e}_3$.

3. (a) $\text{span}\{(1,0,-1,0),(0,1,0,-1)\}$
   (b) Ortogonalbas i L, t ex $(1,0,1,0)$ och $(0,1,0,1)$, för $L^{\perp}$, se ovan.
   (c) $(2,3,2,3)$.
   (d) $(-1,-1,1,1)$.
   (e) $(1,2,3,4) = (2,3,2,3) + (-1,-1,1,1)$.

4. $4/3$. Projektionen är funktionen $g(t) = 0$.