Matematiska Institutionen,
KTH

Problem till övning nr 9 den 21 februari, Linjär algebra D1, SF1604, vt 12.

1. En funktion f från R^3 till R^4 definieras genom

$$f(x, y, z) = (x - y + 2z, x - z, y + 2x, x - y - z).$$

Visa att denna funktion är en linjär avbildning och bestäm avbildningens matris.

2. Låt $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ och $\bar{e}_3$ utgöra standardbasen i R^3. För den linjära avbildningen A gäller att

$$A(1, 0, 0) = (1, -1, 1), \quad A(0, 1, 0) = (2, -3, 1), \quad A(0, 0, 1) = (-1, 3, 1).$$

(a) Bestäm avbildningens matris.
(b) Bestäm avbildningens kärna.
(c) Bestäm avbildningens bildrum.
(d) Bestäm samtliga vektorer $\bar{x}$ i R^3 sådana att $A\bar{x} = (-1, 3, 1)$.

3. Antag att den linjära avbildningen A från R^3 till R^3, relativt standardbasen i R^3, representeras av matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestäm avbildningens matris relativt basen B' som består av vektorerna $\bar{f}_1 = (1, 2, 0)$, $\bar{f}_2 = (0, 1, 1)$, $\bar{f}_3 = (1, 1, -2)$.

4. För den linjära avbildningen A gäller att

$$A(1, 2, -1) = (2, 1, 1), \qquad A(2, 0, -1) = (1, 2, 3), \qquad A(-1, 1, 0) = (1, 1, 1).$$

Bestäm avbildningens matris relativt standardbasen.

5. (ON-system) Låt $\bar{v}_0$ vara en fix vektor i R^3. Visa att avbildningen

$$T(\bar{x}) = \bar{x} \times \bar{v}_0$$

är en linjär avbildning. Bestäm avbildningens matris om $\bar{v}_0 = (1, 2, 3)$. Bestäm också avbildningens kärna och bildrum.

6. **Fler övningar finns i läroboken. Se förslag i kursPM. Övning ger färdighet.**

SVAR

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) $\text{span}\{(-3,2,1)\}$.

(c) $\text{span}\{(1,-1,1),(2,-3,1)\}$

(d) $(x,y,z) = (0,0,1) + t(-3,2,1)$ där t är ett godtyckligt reelt tal.

3.

$$\begin{pmatrix} 9 & 10 & -9 \\ -8 & -11 & 9 \\ -6 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -3 & -2 & -8 \\ -4 & -3 & -11 \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kärnan är $\text{span}\{(1,2,3)\}$, bildrummet består av de 3-tipplar (x,y,z) som är lösningar till ekvationen $x + 2y + 3z = 0$.