Matematiska Institutionen
KTH

Kompletterande lösningar till problemen 6, 7c och 8 vid tentamensskrivningen på kursen Linjär algebra II, SF1604, den 15 december 2011.

6. (5p) (ON-system) Volymen av en ellipsoid är lika med $4\pi abc/3$, där a, b och c är lika med ellipsoidens radier, dvs de halva längderna av ellipsoidens huvudaxlar. Visa att de punkter (x, y, z) som satisfierar nedanstående olikhet utgör en ellipsoid och bestäm dess volym

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{2}{3}(xy + xz + yz + x + y + z).$$

Lösning: För att få lättare tal att räkna med multiplicerar vi olikheten med 3 och subtraherar vänstra ledet:

$$3(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + xz + yz) - 2(x + y + z) \leq 0.$$

Vi kan nu uttrycka den kvadratiska formen i olikheten ovan med hjälp av en symmetrisk matris

$$(x \;\; y \;\; z)\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2(x + y + z) \leq 0.$$

Matrisens karakteristiska ekvation $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ har roten $\lambda = 1$ (vilken vi funnit genom gissning) samt dubbelroten $\lambda = 4$. Tillhörande egenvektorer bestäms på sedvanligt sätt och vi finner med hjälp av dessa den ortogonala diagonaliseringen av matrisen i föregående ekvation

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Vi inför nya koordinater med hjälp av ortogonalmatrisen $\mathbf{Q}$ ovan till vänster:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

eller ekvivalent

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Vi uttrycker nu x, y och z som linjärkombinationer av x', y' och z'. Adderar vi dessa linjärkombinationer får vi

$$x + y + z = \sqrt{3}x' + 0y' + 0z'.$$

Så i det nya koordinatsystemet kan olikheten skrivas

$$x'^2 + 4y'^2 + 4z'^2 - 2\sqrt{3}x' \leq 0.$$

Vi kvadratkompletterar nu och får

$$(x' - \sqrt{3})^2 - 3 + 4y'^2 + 4z'^2 \leq 0$$

dvs

$$(x' - \sqrt{3})^2 + 4y'^2 + 4z'^2 \leq 3$$

Vi flyttar origot enligt transformationen nedan

$$x'' = x' - \sqrt{3}, \qquad y'' = y' \qquad z'' = z'$$

och i nya koordinatsystemet lyder då den givna olikheten

$$x''^2 + 4y''^2 + 4z''^2 \leq 3.$$

Det är nu dags att beräkna volymen. Vi har enbart vridit koordinataxlarna, med hjälp av ortogonalmatrisen $\mathbf{Q}$, samt gjort en förflyttning av origot. Ingen av dessa åtgärder har påverkat volymen. Koordinataxlarna utgör ellipsens axlar. Ytans skärningspu med x''-axeln får vi om vi sätter $y'' = 0$ och $z'' = 0$ i ekvationen $x''^2 + 4y''^2 + 4z''^2 = 3$, och motsvarande för övriga axlar. Skärningspunkterna blir då

$$(\pm\sqrt{3}, 0, 0), \qquad (0, \pm\sqrt{3}/2, 0), \qquad (0, 0, \pm\sqrt{3}/2).$$

Så ellipsoidens radier är

$$a = \sqrt{3}, \quad b = \sqrt{3}/2, \quad c = \sqrt{3}/2,$$

alltså

SVAR:

$$\frac{4\pi}{3}\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\pi$$

DEL III (Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.)

7. (a) (2p) –

   (b) (3p) Undersök om det finns någon ickesingulär symmetrisk matris $\mathbf{B}$ sådan att

$$\mathbf{B}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{B}^n \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Lösning: Vi observerar att

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Så för varje matris $\mathbf{B}$ med $(2 \quad -3 \quad 1)^T$ som en egenvektor hörande till egenvärdet $\lambda = 1/2$ och med $(1 \quad 0 \quad -2)^T$ som egenvektorer hörande till egenvärdet $\lambda = 1$ gäller att

$$\mathbf{B}^n \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbf{B}^n \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och som följd därav

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{B}^n \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Vi visar nu att det finns en symmetrisk matris $\mathbf{B}$ som har de ovan angivna egenvektorerna och som dessutom har vektorn $(1 \quad 1 \quad 1)^T$ som egenvektor hörande till egenvärdet $\lambda = 1$.
Låt E_1 och $E_{1/2}$ vara följande delrum till R^3:

$$E_1 = \text{span}\{(1 \;\; 1 \;\; 1)^T, (1 \;\; 0 \;\; -2)^T\}, \quad E_{1/2} = \text{span}\{(2 \;\; -3 \;\; 1)^T\}$$

Vi observerar att $E_{1/2}$ är ortogonala komplementet till E_1. Om vi då väljer en ON-bas $\bar{e}_1$ och $\bar{e}_2$ för E_1 och kompletterar med $\bar{e}_3$ till en ON-bas för R^3 så kommer $\bar{e}_3$ att tillhöra $E_{1/2}$.
En matris $\mathbf{B}$ sådan att

$$\mathbf{B}\bar{e}_1 = 1 \cdot \bar{e}_1, \qquad \mathbf{B}\bar{e}_2 = 1 \cdot \bar{e}_2, \qquad \mathbf{B}\bar{e}_3 = \frac{1}{2} \cdot \bar{e}_3,$$

är då, enligt sats 7.3.1, symmetrisk. Eftersom den har egenrummen E_1 och $E_{1/2}$ kommer kravet i ekvation (1) att vara uppfyllt. Eftersom $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ och $\bar{e}_3$ är linjärt oberoende hörande till egenvärden som är skilda från noll så är matrisens determinant skild från noll, och därmed är matrisen ickesingulär.

8. (5p) En minsta kvadratlösning till $\mathbf{A}\bar{x} = \bar{b}$ säges vara optimal om $||\bar{x}||$ är minimal. Finn alla optimala minsta kvadratlösningar till $\mathbf{A}\bar{x} = \bar{b}$ då

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lösning: Varje minstakvadratlösning satisfierar normalekvationerna $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\bar{x} = \mathbf{A}^T\bar{b}$, dvs ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 & -4 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \\ 8 & 4 & 20 & 0 \\ -4 & 8 & 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Lösningen till detta ekvationssystem, som vi får t ex med sedvanlig Gausselimination, är

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1-2s+t, 1-s-2t, s, t) = (1,1,0,0)+s(-2,-1,1,0)+t(1,-2,0,1).$$

eller ekvivalent

$$(1,1,0,0) - (x_1, x_2, x_3, x_4) = s(2,1,-1,0) + t(-1,2,0,-1). \tag{2}$$

Observera att med $L = \text{span}\{(2,1,-1,0), (-1,2,0,-1)\}$ så är $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ skillnaden mellan $(1,1,0,0)$ och en vektor i L. Så $\bar{x}$ har kortast längd när den är ortogonal mot L.

Den optimala lösningen $\bar{x}$ till det ursprungliga systemet ges alltså av minstakvadratlösningen till följande ekvationssystem för s och t:

$$(1,1,0,0) = s(2,1,-1,0) + t(-1,2,0,-1),$$

som har normalekvationerna

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alltså ger $s = 1/2$ och $t = 1/6$ insatt i ekvation (2) den optimala lösningen

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,1,0,0) - \frac{1}{2}(2,1,-1,0) - \frac{1}{6}(-1,2,0,-1) = \frac{1}{6}(1,1,3,1).$$

SVAR: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{6}(1,1,3,1)$.