Matematiska Institutionen
KTH

Lösningsförsök till tentamensskrivningen på kursen Linjär algebra, SF1604, den 12 juni 2012
kl 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden.

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Den som har b bonuspoäng från läsåret 2011–2012 får använda högst fem av dessa poäng för att uppnå maximalt 15 poäng på del I. Till poängsumman på del II och del III adderas sedan det största av talen $b-5$ och 0.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

DEL I

1. (ON-system) Punkterna $P=(1,1,-1)$, $Q=(2,1,3)$ och $R=(0,3,2)$ ligger i ett plan π.

   (a) (2p) Bestäm ekvationen för planet π.

   Lösning: Normal till planet är vektorn $\bar{n}=PQ\times PR$. Vi finner att $PQ=(1,0,4)$ och $PR=(-1,2,3)$ så

   $$\bar{n}=PQ\times PR=(1,0,4)\times(-1,2,3)=(-8,-7,2).$$

   Planets ekvation blir då

   $$-8(x-1)-7(y-1)+2(z+1)=0$$

   dvs $-8x-7y+2z=-17$.

   (b) (1p) Visa att varken punkten $S=(1,1,1)$ eller punkten $T=(3,3,3)$ tillhör planet π.

   Lösning: Vi substituerar koordinaterna till punkterna S och T i planets ekvation och får då

   $$-8\cdot 1-7\cdot 1+2\cdot 1=-13 \qquad \text{resp} \qquad -8\cdot 3-7\cdot 3+2\cdot 3=-39.$$

   Eftersom varken -13 eller -39 är lika med -17 så ligger varken S eller T i planet.

(c) (2p) Avgör om punkterna S och T ligger på samma sida eller på olika sidor om planet π.

Lösning: Vi undersöker var skärningspunkten mellan linjen ℓ från S till T och planet π ligger. Linjens parameterform är $(x, y, z) = t(1, 1, 1)$. Skärningspunktens t-värde fås ur ekvationen

$$-8t - 7t + 2t = -17$$

varur $t = 17/13$. Punkterna på linjestycket mellan S och T har t-värden mellan 1 och 3, så mellan S och T finns punkten $(17/13, 17/13, 17/13)$ i planet, (med t-värdet $t = 17/13$ som är större än ett och mindre än tre). Alltså ligger S och T på olika sidor om planet.

2. Låt a och b beteckna reella tal och låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ beteckna nedanstående matris

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 2 & b \\ 3 & b \end{pmatrix}$$

(a) (2p) Om $a \neq 2$ så är matrisekvationen $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ lösbar för varje värde på talet b. Förklara varför.

Lösning: Om $a \neq 2$ så är A:s determinant lika med

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a-2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = a - 2 \neq 0.$$

Eftersom $\mathbf{A}$ då är inverterbar kan vi lösa ut $\mathbf{X}$ till $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

(b) (3p) Ange samtliga lösningar till matrisekvationen $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ om $b = 0$ och $a = 2$.

Lösning: Vi ansätter

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

och har att lösa två linjära ekvationssystem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 = 0 \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 0 \\ 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 = 0 \end{cases}$$

som vi löser på sedvanligt sätt med hjälp av Gauss elimination till

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 0) + t(2, 0, -1) \qquad (y_1, y_2, y_3) = s(2, 0, -1),$$

där s och t kan väljas godtyckligt. Vi får

SVAR:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2t & 2s \\ 1 & 0 \\ -t & -s \end{pmatrix}$$

där s och t kan väljas godtyckligt.

Lösning:

3. Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{v}$ beteckna matriserna

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 17 & -12 \\ 24 & -17 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) (2p) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen $\mathbf{A}$.

Lösning: Vi löser karaktäristiska ekvationen:

$$0 = \begin{vmatrix} 17-\lambda & -12 \\ 24 & -17-\lambda \end{vmatrix} = (17-\lambda)(-17-\lambda)+12\cdot 24 = \lambda^2-17^2+12\cdot 24 = \lambda^2-1,$$

så matrisens egenvärden är $\lambda = 1$ och $\lambda = -1$.
Egenvärden till $\lambda = 1$ bestämmes nedan:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} (17-\lambda)x & - & 12y & = & 0 \\ 24x & + & (-17-\lambda)y & = & 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} (17-1)x & - & 12y & = & 0 \\ 24x & + & (-17-1)y & = & 0 \end{array}\right.$$

dvs $4x-3y = 0$. Egenvektorer hörande till egenvärdet $\lambda = 1$ blir alltså $(x, y) = t(3, 4)$.
Egenvärden till $\lambda = -1$ bestämmes nedan:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} (17-\lambda)x & - & 12y & = & 0 \\ 24x & + & (-17-\lambda)y & = & 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} (17+1)x & - & 12y & = & 0 \\ 24x & + & (-17+1)y & = & 0 \end{array}\right.$$

dvs $3x - 2y = 0$. Egenvektorer hörande till egenvärdet $\lambda = -1$ blir alltså $(x, y) = t(2, 3)$.

(b) (2p) Bestäm $\mathbf{A}^{99}\mathbf{v}$.

Lösning: Vi skriver $\mathbf{v}$ som en linjärkombination av egenvektorerna $(3, 4)$ och $(2, 3)$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+2b \\ 4a+3b \end{pmatrix}$$

som har lösningen $a = -1$ och $b = 2$. Vi kan nu lätt beräkna $\mathbf{A}^{99}\mathbf{v}$:

$$\mathbf{A}^{99}\mathbf{v} = \mathbf{A}^{99}(-\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = -\mathbf{A}^{99}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\mathbf{A}^{99}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= -(1)^{99}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 2(-1)^{99}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -10 \end{pmatrix}$$

(c) (1p) Bestäm $\mathbf{A}^{100}$.

Lösning: Vektorerna $(3,4)$ och $(2,3)$ spänner upp R^2 och varje vektor $\mathbf{v} = (\mathbf{x},\mathbf{y})$ kan då skrivas som en linjärkombination $(x,y) = a(3,4) + b(2,3)$ av dessa. Med inspiration från ovan får vi då:

$$\mathbf{A}^{100}\mathbf{v} = \mathbf{A}^{100}(a\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}) = a\mathbf{A}^{100}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + b\mathbf{A}^{100}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} =$$

$$= a(1)^{100}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + b(-1)^{100}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \mathbf{v}.$$

Matrisen $\mathbf{A}^{100}$ multiplicerar således varje vektor $\mathbf{v}$ till vektorn $\mathbf{v}$, varför $\mathbf{A}^{100}$ måste vara identitetsmatrisen.

DEL II

4. (5p) (ON-system) Bestäm en ortogonalbas för nollrummet till matrisen

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Utvidga sedan denna bas till en ortogonalbas för R^5.

Lösning: Vi bestämmer först nollrummet genom att, med hjälp av Gausselimination, lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

vilket ju är färdigreducerat så lösningen blir

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = s(1,-2,1,0) + t(0,-1,0,1).$$

Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod ger nu med $\bar{e}_1 = (0,-1,0,1)$ att

$$\bar{e}_2 = (1,-2,1,0) - \frac{(1,-2,1,0)\cdot(0,-1,0,1)}{(0,-1,0,1)\cdot(0,-1,0,1)}(0,-1,0,1) =$$

$$= (1,-2,1,0) - \frac{2}{2}(0,-1,0,1) = (1,-1,1,-1).$$

Ortogonala komplementet till matrisens nollrum är matrisens radrum. Det är 2-dimensionellt. En ortogonalbas för radrummet kommer då att tillsammans med en ortogonalbas för nollrummet att utgöra en ortogonalbas för R^4.

Vi bestämmer nu en ortogonalbas för radrummet. Med $\bar{e}_3 = (1,1,1,1)$ finner vi med Gram-Schmidts metod

$$\bar{e}_4 = (0,1,2,1) - \frac{(1,1,1,1)\cdot(0,1,2,1)}{(1,1,1,1)\cdot(1,1,1,1)}(1,1,1,1) = (0,1,2,1) - \frac{4}{4}(1,1,1,1)$$

dvs

$$\bar{e}_4 = (-1,0,1,0).$$

SVAR: Vektorerna $(0,-1,0,1)$ och $(1,-1,1,-1)$ tillsammans med $(1,1,1,1)$ och $(-1,0,1,0)$

5. (5p) Betrakta tretipplarna $\bar{u} = (1, 2, 1)$, $\bar{v} = (1, 3, 2)$ och $\bar{w} = (1, 4, 4)$ i vektorrummt R^3. Om dessa tre vektorer har koordinaterna $\bar{u} = (2, 2, 1)_{\mathcal{B}}$, $\bar{v} = (1, 3, 1)_{\mathcal{B}}$ och $\bar{w} = (1, 4, 1)_{\mathcal{B}}$ i en bas $\mathcal{B}$ för R^3, vad har då vektorn $\bar{z} = (3, 2, 1)$ för koordinater i basen $\mathcal{B}$.

   Lösning: Transitionsmatrisen $\mathbf{T}$ som beskriver basbytet från standardbasen till bassystemet $\mathcal{B}$ uppfyller

$$\mathbf{T}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{T}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{T}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Detta kan sammanfattas i matrisekvationen

$$\mathbf{T}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Vi söker

$$\mathbf{T}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Vi väljer att beräkna $\mathbf{T}$ och sedan göra beräkningen ovan. Sedvanlig beräkning av invers (och matrismultiplikation) ger

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Svaret ges nu av

$$\mathbf{T}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

6. (5p) Låt $\mathcal{P}$ beteckna det vektorrum som består av alla polynom med reella koefficienter och med sedvanlig polynomaddition och multiplikation med skalär som operationer. Låt D beteckna den linjära avbildning som ges av derivering, t ex så är $(D - I)p(t) = p'(t) - p(t)$. Beskriv, för varje naturligt tal $n = 0, 1, 2, \ldots$, kärna och värderum (bildrum) till den linjära avbildningen $D^n(D - I)$ från $\mathcal{P}$ till $\mathcal{P}$.

   Lösning: (Vi använder beteckningen $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.) Eftersom $D^n(D - I) = (D - I)D^n$ så är den givna linjära avbildningen en sammansättning av avbildningen $D - I$ med avbildningen D^n. Derivering av polynom ingår i förkunskapskraven och vi vet att

$$D^n t^{n+k} = \begin{cases} 0 & \text{om} \quad k < 0, \\ (n+k)!/k! \cdot t^k & \text{om} \quad k \geq 0. \end{cases}$$

Vi finner alltså att polynom av grad mindre än n avbildas på nollpolynomet och att polynom av grad n eller högre avbildas på polynom som inte är nollpolynomet. Alltså

$$\ker(D^n) = \{a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} \mid a_i \in R \text{ för } i = 0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Eftersom

$$t^k = D^n \frac{k!}{(n+k)!} t^{n+k},$$

för $k = 0, 1, \ldots$ så är $\mathrm{Im}(D^n) = \mathcal{P}$.

Men

$$(D - I)(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) = -a_0 + (2a_2 - a_1)t + \cdots + (na_n - a_{n-1})t^{n-1} - a_n t^n.$$

Varur vi ser att kärnan till $D - I$ enbart består av nollpolynomt, samt att varje polynom $p(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n$ är bild under $D - I$ av något polynom $q(t)$, dvs

$$p(t) = (D - I)q(t)$$

där

$$q(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \quad \text{med} \quad a_n = -b_n, \;\; a_{n-1} = na_n - b_{n-1}, \ldots$$

Sammansättningen av $D - I$ med D^n handlade det om, och då $\ker(D - I)$ enbart består av nollpolynomet har vi

$$(D - I)D^n p(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad D^n p(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad p(t) \in \ker(D^n).$$

Med liknande resonemang ser vi att $\mathrm{Im}((D - 1)D^n) = \mathcal{P}$.

SVAR:

$$\mathrm{Im}(D^n(D - 1)) = \mathcal{P}$$

och

$$\ker(D^n(D - I)) = \{a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} \mid a_i \in R \text{ för } i = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

DEL III (Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.)

7. Låt, för $n = 1, 2, 3, \ldots$, $p_n(z)$ beteckna polynomet $p_n(z) = z^n + z^{n-1} + \cdots + z + 1$.
   (a) (2p) Visa att samtliga nollställen till polynomen $p_2(z)$ och $p_3(z)$ har beloppet ett.

   Lösning: Se nedan

   (b) (1p) Bestäm antalet faktorer av grad 1 som uppstår vid en faktorisering av polynomet $p_n(z)$ i irreducibla och reella första- och andragradsfaktorer.

   Lösning: Se nedan

(c) (2p) Antag att $az^2 + bz + c$, där a, b och c är reella tal, delar polynomet $p_n(z)$. Undersök om det finns något samband mellan talen a och c.

Lösning: Vi konstaterar att

$$(z-1)p_n(z) = z^{n+1} - 1.$$

Nollställena till $p_n(z)$ utgöres alltså, med ett undantag, av lösningarna till ekvationen $z^{n+1} = 1$. Undantaget är roten $z = 1$. Dessa lösningar ligger ”jämnt” fördelade på enhetscirkeln. Således alla lösningar har beloppet 1. Vidare så kommer det bara att finnas högst två reella rötter, $z = 1$ och $z = -1$. Vid en faktorisering i rella faktorer av ett polynom med reellla faktorer paras ”konjugerade” förstagradsfaktorer ihop, mer precist:

$$(z-\alpha)(z-\bar{\alpha}) = z^2 - (\alpha+\bar{\alpha})z + \bar{\alpha}\bar{\alpha} = z^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha) + |\alpha|^2 = z^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha) + 1.$$

Slutsatsen blir då att det kommer finnas högst en faktor av grad 1, nämligen $z - (-1)$, samt att för det efterfrågade sambandet mellan a och c att dessa tal är lika, eftersom de i ekvationen ovan båda är lika med 1.

8. (5p) (ON-system) Bestäm samtliga plan π, som innehåller origo och är parallellt med vektorn $(1, -1, 0)$, och till vilka det finns en 3×3-matris $\mathbf{S}_\pi$ sådan att $\mathbf{S}_\pi$ beskriver spegling i planet π och har ett matriselementet i rad ett och kolonn ett som är lika med $s_{11} = 1/3$, dvs,

$$\mathbf{S}_\pi = \begin{pmatrix} 1/3 & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{pmatrix},$$

där $\star$ betecknar reella tal som du får ta reda på själv.

Lösning: Låt $\bar{e}_1$ och $\bar{e}_2$ vara en ON-bas för π och låt $\bar{e}_3$ vara en vektor av längd ett vinkelrät mot π. Dessa tre vektorer utgör då en ON-bas för rummet för vilken det gäller att

$$S\bar{e}_1 = \bar{e}_1, \quad S\bar{e}_2 = \bar{e}_2, \quad S\bar{e}_3 = -\bar{e}_1.$$

Speglingen S, som ju är en linjär avbildning, avbildar då en ON-bas på en ON-bas, vilket ger att S representeras av en ortogonalmatris, samt har en ON-bas bestående av egenvektorer, vilket ger att den matris $\mathbf{S}$ som representerar S är symmetrisk. Vi fyller nu succesisvt i de saknande elmeneten i matrisen.

Att $(1, -1, 1)$ är parallellt med π innebär att denna vektor speglas på sig själv. Detta tillsammans med symmetrin ger nu att

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & \star \\ 2/3 & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

Att matrisen är en ortogonalmatris, ger då tillsammans med symmetrin två möjligheter för $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & \star & \star \\ 2/3 & \star & \star \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & \star & \star \\ -2/3 & \star & \star \end{pmatrix}$$

Återigen $(1,-1,0)$ speglas på sig själv, och symmetrin ger nu att $\mathbf{S}$ är lika med

$$\mathbf{S}=\mathbf{S}_1=\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & \star \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \mathbf{S}=\mathbf{S}_2=\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & \star \end{pmatrix}$$

Sluligen, eftersom raderna i $\mathbf{S}$ är parvis ortogonala får vi nu att

$$\mathbf{S}=\mathbf{S}_1=\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \mathbf{S}=\mathbf{S}_2=\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Planet π består av de vektorer som speglas på sig själva, dvs egenrumet hórande till egenvärdet $\lambda=1$, dvs nollrummen till de respektive matriserna

$$\mathbf{S}_1-I=\begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \mathbf{S}_2-I=\begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Matrisernas radrum har dimension 1, nollrummet är radrummets ortogonala komplement. Slutsatsen blir att det finns två möjliga plan som uppfyller förutsättningarna, nämligen lösningarna till de bägge ekvationerna.

$$-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z=0 \quad \text{resp} \quad -\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z=0$$

Hyfsning av ekvationerna ger ekvationerna $x+y-z=0$ resp $x+y+z=0$. Återstår tt kontrolera att $\mathbf{S}_1$ och $\mathbf{S}_2$ verkligen beskriver speglingar i dessa plan. Vi testar.

Multiplikation av planens normaler med respektive matris ger

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

resp

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

De bägge planen är egenrum hörande till egenvärdet 1 till respektive matris, och således avbildar de funna matriserna vektorer i respektive plan på sig själva. (Alternativt: Eftersom matriserna är symmetriska och med egenrum hörande till egenvärdet 1 som har dimension 2, måste det finnas ett egenvärde skilt från 1. Egenvärden till ortogonalmatriser har beloppet 1, så detta egenvärde måste vara -1, och tillhörande respektive egenvektorer måste vara ortogonala mot de bägge funna planen. Matriserna speglar alltså respektive normal till planen. Man kan också alternativt konstatera att matrisernas determinanter är lika med -1, varur det ”tredje” egenvärdet måste vara lika med -1, etc)