Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra, SF1604, den 14 mars 2011 kl 08.00-13.00.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Bonuspoäng: Bonuspoäng erhållna från lappskrivningar till kursen för D under vt11 adderas till skrivningspoängen. Generellt gäller att bonuspoäng får användas vid ordinarie tentamen och vid första ordinarie omtentamenstillfälle för respektive sektion, vilket för sektion F liksom för sektion D är den 9 juni i år.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

1. (5p) För ett eller flera värden på talet a kommer ekvationssystemet nedan att ha oändligt många lösningar. Bestäm dessa värden på a samt bestäm samtliga lösningar till systemet för dessa a-värden.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + az = 3 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

Lösning: Gauss elimination ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a & 3 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & a+1 & 4 \\ 1 & -1 & a & 3 \\ a+1 & 0 & a+1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & a & 3 \\ a+1 & 0 & a+1 & 4 \end{array}\right)$$

I tablån ser vi att vi får oändligt många lösningar om och endast om $a = 1$. Med detta värde på talet a har vi tablåerna

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Med $z = t$ godtyckligt har vi att $x = 2 - t$ och $y = -1$ så

SVAR: $(x, y, z) = t(-1, 0, 1) + (2, -1, 0)$.

2. (5p) För den linjära avbildningen A på R^3 gäller att $A(1, 1, 1) = (1, 2, 3)$, $A(0, 1, 1) = (4, 5, 6)$ och $A(0, 0, 1) = (7, 8, 9)$. Bestäm avbildningens matris relativt standardbasen, bestäm $A(3, 2, 1)$ samt bestäm avbidningens kärna.

   Lösning: Vi använder Martins metod för att bestämma avbildningens matris:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 8 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 8 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 8 & 9 \end{array}\right)$$

   Avildningens matris relativt standardbasen blir nu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 7 \\ -3 & -3 & 8 \\ -3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

   Vi finner $A(3, 2, 1)$ med hjälp av matrismultiplikationen nedan

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 7 \\ -3 & -3 & 8 \\ -3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

   så $A(3, 2, 1) = (-8, -7, -6)$.

   Nollrummet ges av lösningen till det homogena systemet

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dvs} \quad \begin{pmatrix} -3 & -3 & 7 \\ -3 & -3 & 8 \\ -3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   som vi löser och hittar lösningen

$$(x_1, x_2, x_3) = t(1, -1, 0)\ .$$

3. (5p) Kolonnvektorn $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^T$ är en egenvektor till matrisen $\mathbf{A}$ nedan,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Bestäm matrisens samtliga egenvärden och egenvektorer samt en matris $\mathbf{P}$ sådan att $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ är en diagonalmatris.

   Lösning: Vi börjar med att hitta rötterna till den krakteristiska ekvationen $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$:

$$0 = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 3 \\ 0 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

så rötterna är $\lambda = -1$, $\lambda = 1$ och $\lambda = 2$. Vi kan nu bestämma egenvektorer på sedvanligt sätt, men man ser kanske omedelbart att matrisen multiplicerar $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ till vektorn $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ så $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ är en egenvektor som hör till egenvärdet -1. En enkel kontroll ger att den givna egenvektorn $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^T$ är en egenvektor som hör till egenvärdet $\lambda = 1$.

Vi söker egenvektorer hörande till egenvärdet $\lambda = 2$ på sedvanligt sätt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eftersom detta ekvations sytem har lösningarna $\begin{pmatrix} 0 & t & t \end{pmatrix}^T$ så kommer det egenrum som hör till egenvärdet $\lambda = 2$ att vara

$$E_2 = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\} .$$

Enligt vad vi fann ovan kommer övriga egenvektorer att vara vektorerma i egenrummen

$$E_{-1} = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T\} \quad \text{och} \quad E_1 = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\} .$$

Den diagonaliserande matrisen $\mathbf{P}$:s kolonner bildar en bas som består av egenvektorer:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

DEL II

4. (5p) I den vanliga 3-dimensionella rymden, och med koordinater givna i ett ON-system, står vi i punkten $P = (1, 2, 3)$ och betraktar planet π med ekvationen $2x + 3y - z = 13$. Vi skickar två ljusstrålar från P mot π, en som går vinkelrätt mot planet π och en som går parallellt med vektorn $(0, -1, 1)$. Dessa strålar träffar planet π i punkterna Q respektive R. Bestäm arean av triangeln med hörn i punkterna P, Q och R.

   Lösning: Vi bestämmer först kordinaterna för punkten R, som ju är skärningspunkten melln linjen $(x, y, z) = (1, 2 - t, 3 + t)$ och ett plan med ekvationen $2x + 3y - z = 13$ vilket ger för skärningspunkten ett t-värde som skall satisfiera

   $$2 \cdot 1 + 3(2 - t) - (3 + t) = 13 ,$$

   och alltså att $t = -2$. En punkt med detta t-värde på strålen är punkten $R = (1, 4, 1)$.

Längden av vektorn PQ är lika med längden av PR:s projektion på planets normal $(2,3,-1)$. Då $PR = (0,2,-2)$ så blir denna projektion

$$\frac{(0,2,-2)\cdot(2,3,-1)}{(2,3,-1)\cdot(2,3,-1)}(2,3,-1) = \frac{8}{14}(2,3,-1)$$

Längden av denna projektion är

$$\frac{8}{14}||(2,3,-1)|| = \frac{8}{14}\sqrt{2^2+3^2+1^2} = \frac{8}{\sqrt{14}} \,.$$

Triangeln P, Q, R är rätvinklig med den räta vinkeln i hörnet Q. Pythagoras sats ger att längden av vektorn QR ges av

$$||QR||^2 = ||PR||^2 - ||PQ||^2 = 8 - \frac{64}{14} = \frac{48}{14} \,.$$

Triangelns area blir alltså

SVAR:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{\sqrt{14}}\cdot\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{14}} = \frac{8\sqrt{3}}{7} \,.$$

5. (5p) Visa, t ex med hjälp av ett induktionsbevis, att talen

$$a_n = 4^n + (-3)^n \,,$$

satisfierar rekursionen

$$a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}, \quad a_0 = 2,\ a_1 = 1$$

för samtliga naturliga tal $n = 0,1,2,\ldots$.

Lösning: Påståendet är sant för $n = 0$ och $n = 1$ ty uppenbarligen är

$$4^0 + (-3)^0 = 1 + 1 = 2 \qquad \text{och} \qquad 4^1 + (-3)^1 = 4 - 3 = 1 \,.$$

Vi visar nu att

$$a_{n-1} = 4^{n-1} + (-3)^{n-1} \quad \text{och} \quad a_{n-2} = 4^{n-2} + (-3)^{n-2} \quad \Rightarrow \quad a_n = 4^n + (-3)^n \,.$$

Den givna rekursionen ger då att

$$a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2} = 4^{n-1} + (-3)^{n-1} + 12(4^{n-2} + (-3)^{n-2}) =$$

$$= 4^{n-1} + 3\cdot 4^{n-1} + (-3)^{n-1} - 4\cdot(-3)^{n-1} = 4\cdot 4^{n-1} - 3(-3)^{n-1} = 4^n + (-3)^n \,.$$

Enligt induktionsprincipen gller nu åstående för alla naturliga tal n.

6. (5p) Låt L beteckna det delrum till R^5 som spänns upp av vektorerna $(1,2,-1,2,1)$, $(1,3,-2,4,5)$ och $(1,0,1,-2,-7)$, dvs

$$L = \text{Span}\{(1,2,-1,2,1),(1,3,-2,4,5),(1,0,1,-2,-7)\} \,.$$

Bestäm projektionen av vektorn $(1,1,1,1,1)$ på delrummet L.

Lösning: Vi bestämmer först en bas för delrummet, genom att betrakta L som radrummet till matrisen nedan, samt utnyttja att elementära radoperationer inte ändrar radrummet.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

Elementära radoperationer ger

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

De två raderna i denna matris är en bas för L.

Med hjälp av Gram-Schmidts metod skapar vi nu en ortogonalbas för L.

Vi låter $\bar{e}_1 = (1,2,-1,2,1)$ och

$$\bar{e}_2 = (0,1,-1,2,4) - \frac{(0,1,-1,2,4)\cdot(1,2,-1,2,1)}{(1,2,-1,2,1)\cdot(1,2,-1,2,1)}(1,2,-1,2,1) =$$

$$(0,1,-1,2,4) - \frac{11}{11}(1,2,-1,2,1) = (-1,-1,0,0,3)\ .$$

Enligt formeln för projektion får vi nu att den sökta projektionen blir

$$\frac{(1,1,1,1,1)\cdot(1,2,-1,2,1)}{(1,2,-1,2,1)\cdot(1,2,-1,2,1)}\bar{e}_1 + \frac{(1,1,1,1,1)\cdot(-1,-1,0,0,3)}{(-1,-1,0,0,3)\cdot(-1,-1,0,0,3)}\bar{e}_2 =$$

$$\frac{5}{11}(1,2,-1,2,1) + \frac{1}{11}(-1,-1,0,0,3) = \frac{1}{11}(4,9,-5,10,8)\ .$$

SVAR: $(4/11, 9/11, -5/11, 10/11, 8/11)$

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

7. Låt $\mathbf{A}$ vara en $n \times n$-matris.

   (a) (1p) Visa att om $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$, där $\mathbf{I}$ betecknar identitetsmatrisen, så har $\mathbf{A}$ full rang.

   Lösning:

   $$\mathbf{A}^2 = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{A}) \neq 0$$

   Enligt känd sats har en kvadratisk matris full rang om och endast om dess determinant inte är lika med noll.

(b) (2p) Visa att om $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$, där $\mathbf{0}$ betecknar nollmatrisen, så är $\mathbf{A}$:s rang högst lika med $n/2$.

Lösning: Matrisen $\mathbf{A}$ multiplicerar varje kolonn i $\mathbf{A}$ på nollvektorn. Detta innebär att $\mathbf{A}$:s kolonnrum ligger i $\mathbf{A}$:s nollrum. Detta ger att, med $R(\mathbf{A})$ betecknande $\mathbf{A}$:s kolonnrum,

$$\dim(R(\mathbf{A})) \leq \dim(N(\mathbf{A})) \ .$$

Men enligt känd sats gäller att

$$\dim(R(\mathbf{A})) + \dim(N(\mathbf{A})) = n \ .$$

Detta ger tillsammans med den andra ekvationen ovan att $\dim(R(\mathbf{A})) \leq n/2$.

(c) (2p) Om $\mathbf{A}^3 = 0$, Vad kan då sägas om $\mathbf{A}$:s rang? Motivera ditt svar!

Lösning: Vi betraktar den linjära avbildning A från R^n till R^n som beskrivs av matrisen $\mathbf{A}$. Fr ett godtyckligt delrum L till R^n gller att A avbildar L på ett delrum till R^n som vi nu betecknar med $A(L)$. Snittet av kärna till A med L, dvs $\ker(A) \cap L$ är ett delrum till R^n och, med dimensionssatsens hjälp får man att

$$\dim(A(L)) = \dim(L) - \dim(\ker(A) \cap L) \geq \dim(L) - \dim(\ker(A)) \ .$$

Så varje gång vi applicerar avbildningen A så sjunker dimensionen av den bild vi får av R^n med högst dimensionen av kärna till A. Skall den sammanlagda bilden av R^n efter tre appliceringar med avbildningen A bli nollvektorn så måste dimensionen av kärnan vara minst $n/3$. Enligt dimensionssatsen kommer då A:s rang att vara högst $n - n/3$, så

SVAR: $\mathbf{A}$:s rang är högst lika med $2n/3$.

Anm. Man kan ge ännu mer precisa svar beroende på vilken rest man får när n delas med 3, men en sådan utredning krävs inte för full poäng på uppgiften.

8. Det finns en inre produkt i R^3 sådan att $(1, 2, -1)$, $(2, 0, 1)$ och $(1, -1, 1)$ kommer att bilda en ON-bas i det inreproduktrum V som den inre produkten definierar.

(a) (1p) Betrakta nu R^3 med denna nya inre produkt och låt $\bar{f}_1 = (2, -2, 2)$. Bestäm vektorer $\bar{f}_2$ och $\bar{f}_3$ sådana att $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ och $\bar{f}_3$ bildar en ortogonalbas i V.

Lösning: Låt $\bar{e}_2 = (1, 2, -1)$, $\bar{e}_3 = (2, 0, 1)$ och $\bar{e}_1 = (1, -1, 1)$. Då $\bar{f}_1$ är parallell med $\bar{e}_1$, mer precist $\bar{f}_1 = 2\bar{e}_1$, så kommer $\bar{f}_1$ att vara ortogonal mot både $\bar{e}_2$ och $\bar{e}_3$. Betecknar vi den inre produkten med $(\bar{u} \mid \bar{v})$ har vi nämligen

$$(\bar{f}_1 \mid \bar{e}_2) = (2\bar{e}_1 \mid \bar{e}_2) = 2(\bar{e}_1 \mid \bar{e}_2) = 2 \cdot 0 = 0 \ ,$$

och

$$(\bar{f}_1 \mid \bar{e}_3) = (2\bar{e}_1 \mid \bar{e}_3) = 2(\bar{e}_1 \mid \bar{e}_3) = 2 \cdot 0 = 0 \ .$$

Då $\bar{e}_2$ förutsattes vara ortogonal mot $\bar{e}_3$ får vi alltså med $\bar{f}_2 = \bar{e}_2$ och $\bar{f}_3 = \bar{e}_3$ att vektorerna $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ och $\bar{f}_3$ utgör en ortogonalbas.

(b) (2p) Betrakta R^3 med denna nya inre produkt och låt $\bar{g}_1 = (1, 2, 3)$. Bestäm vektorer $\bar{g}_2$ och $\bar{g}_3$ sådana att $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ och $\bar{g}_3$ bildar en ortogonalbas i V.

Lösning: Vi söker först koordinaterna till vektorn $\bar{g}_1$ i den givna basen $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ och $\bar{e}_3$:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

som löses med gausselimination varvid man finner att

$$\bar{g}_1 = (x_1, x_2, x_3) = (-16, -7, 12) \ .$$

Eftersom det var antaget att vektorerna $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ och $\bar{e}_3$ bildar en ON-bas så kommer den inre produkten av två vektorer $\bar{u} = (x_1, x_2, x_3)$ och $\bar{v} = (y_1, y_2, y_3)$ med koordinater i denna ON-bas att beräknas enligt formeln

$$(\bar{u} \mid \bar{v}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \ .$$

Man ser lätt att $\bar{g}_2 = (3, 0, 4)$ kommer att vara ortogonal mot $\bar{g}_1$. Vektorn $\bar{g}_3 = \bar{g}_1 \times \bar{g}_2$ blir ortogonal mot både $\bar{g}_1$ och $\bar{g}_2$. Så vi låter

$$\bar{g}_3 = (-16, -7, 12) \times (3, 0, 4) = (-28, 100, 21) \ .$$

Problemet var ställt i standardbasen och vektorern ovan har koordinater i den nya basen $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ och $\bar{e}_3$. Transitionsmatrisen som beskriver detta basbyte ges av matrisen

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi multiplicerar $\bar{g}_2$ och $\bar{g}_3$ med denna matris, (koordinaterna för $\bar{g}_1$ i standardbasen har vi redan), och får

$$\bar{g}_2 = (11, -3, 7) \qquad \bar{g}_3 = (114, 72, -107) \ .$$

(c) (2p) Betrakta nu R^3 samt fyra godtyckliga vektorer $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ och $\bar{z}$ av vilka inga två är parallella med varandra. Kommer det då alltid att finnas en inre produkt i R^3 sådan att $\bar{u} \perp \bar{v}$ och $\bar{w} \perp \bar{z}$? Motivera ditt svar!

Lösning: Nej, ty låt $\bar{w} = \bar{u} + \bar{v}$ och $\bar{z} = \bar{u} + 2\bar{v}$. Om $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är ortogonala så är dom linjärt oberoende och då kan inte heller de vektorer $\bar{w}$ och $\bar{z}$, som vi definierat, vara parallella, ty

$$\bar{w} = \lambda \bar{z} \quad \Rightarrow \quad \bar{u} + \bar{v} = \lambda(\bar{u} + 2\bar{v}) \quad \Rightarrow \quad (1 - \lambda)\bar{u} = (2\lambda - 1)\bar{v}$$

villket skulle motsäga det faktum att $\bar{u}$ och $\bar{v}$ INTE är parallella.
Låt nu den inre produkten vi definerar vara sådan att

$$(\bar{u} \mid \bar{v}) = 0 \ .$$

Då gäller att

$$(\bar{u} + \bar{v} \mid \bar{u} + 2\bar{v}) = (\bar{u} \mid \bar{u}) + 4(\bar{v} \mid \bar{v}) + 3(\bar{u} \mid \bar{v}) = ||\bar{u}||^2 + 4||\bar{v}||^2 > 0 \ .$$

Det vill säga, vektorerna $\bar{w}$ och $\bar{z}$ är inte ortogonala.