3-1

Avsnitt 1.5: Linjer och plan

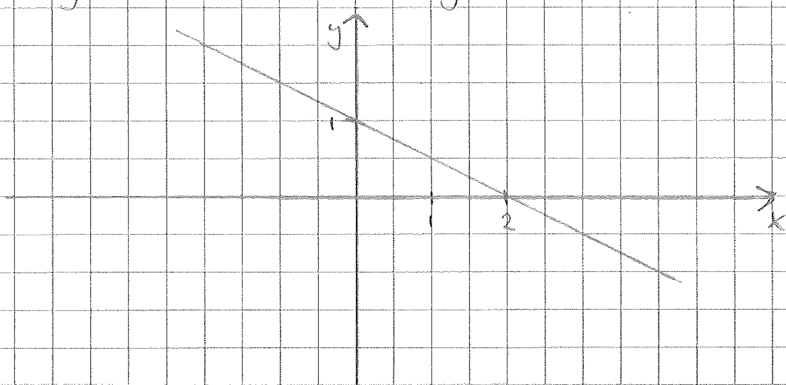
Ekvationer för $\begin{cases} \text{linjer i planet och rummet} \\ \text{plan i rummet} \end{cases}$

1.5.1 Räta linjer i planet

Allmän ekvation för en linje i planet:

$$ax + by + c = 0 \qquad a, b, c \text{ konstanter}$$

Exempel: $x + 2y - 2 = 0 \iff 2y = -x + 2 \iff y = -\frac{x}{2} + 1$



$b \neq 0$: $ax + by + c = 0 \iff by = -ax - c$

$$\iff y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + \left(-\frac{c}{b}\right)$$

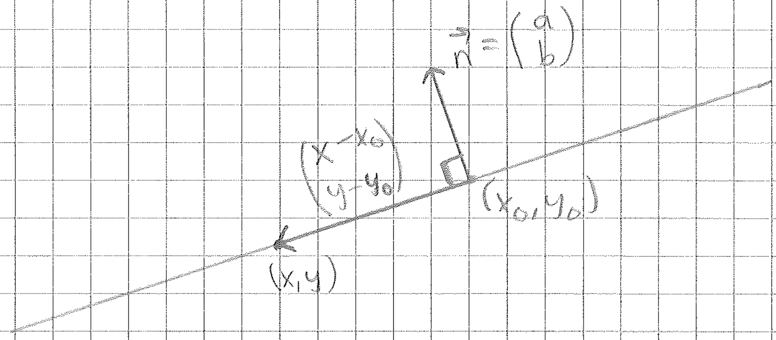
$b = 0, a \neq 0$: $ax + c = 0 \iff x = -\frac{c}{a}$ (lodrät linje)

Observera: $ax + by + c = 0$, $2ax + 2bx + 2c = 0$, $-7ax - 7by - 7c = 0$ osv. ger samma linje

3-(2)

Produkt form. Låt (x_0, y_0) vara en punkt på linjen $ax+by+c=0$. Då ges linjen av ekvationen

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0$$



Vi har nämligen att $ax_0 + by_0 + c = 0 \iff c = -(ax_0 + by_0)$ (ty (x_0, y_0) ligger på linjen), och

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} &= a(x-x_0) + b(y-y_0) \\ &= ax + by \underbrace{-(ax_0 + by_0)}_{c} = ax + by + c = 0 \end{aligned}$$

Exempel. $(x_0, y_0) = (1, \frac{1}{2})$ ligger på linjen $x + 2y - 2 = 0$, så

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1/2 \end{pmatrix} = 0$$

ger linjen

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ är en <u>normal</u> till linjen $ax + by + c = 0$ och är ortogonal mot linjens riktningsvektor.

3 – 3

Parameterform. En linje med riktningsvektor $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ innehållande punkten (x_0, y_0) kan skrivas

$$\begin{cases} x = x_0 + tu \\ y = y_0 + tv \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad t \text{ varierar.}$$

Olika val av parametern t ger olika punkter på linjen.

Exempel $3x - 2y + 4 = 0$

Sätt $x = t$. Detta ger $3t - 2y + 4 = 0$

$$\iff -2y = -3t - 4$$

$$\iff 2y = 3t + 4$$

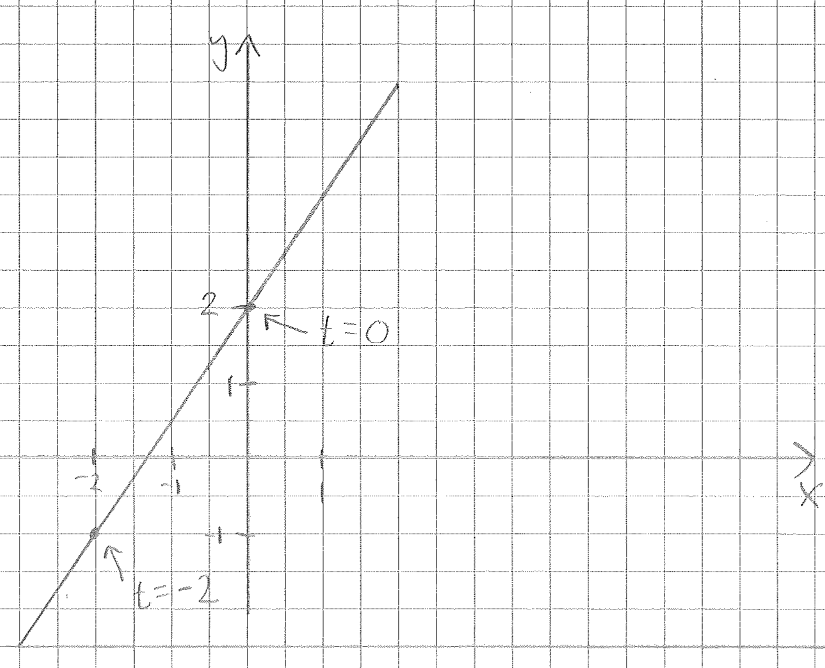
$$\iff y = \tfrac{3}{2}t + 2 = 2 + \tfrac{3}{2}t$$

Alltså:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 + \tfrac{3}{2}t \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$t = 0$ ger $(x, y) = (0, 2)$

$t = -2$ ger $(x, y) = (-2, 2 + \tfrac{3}{2}\cdot(-2)) = (-2, 2 - 3) = (-2, -1)$

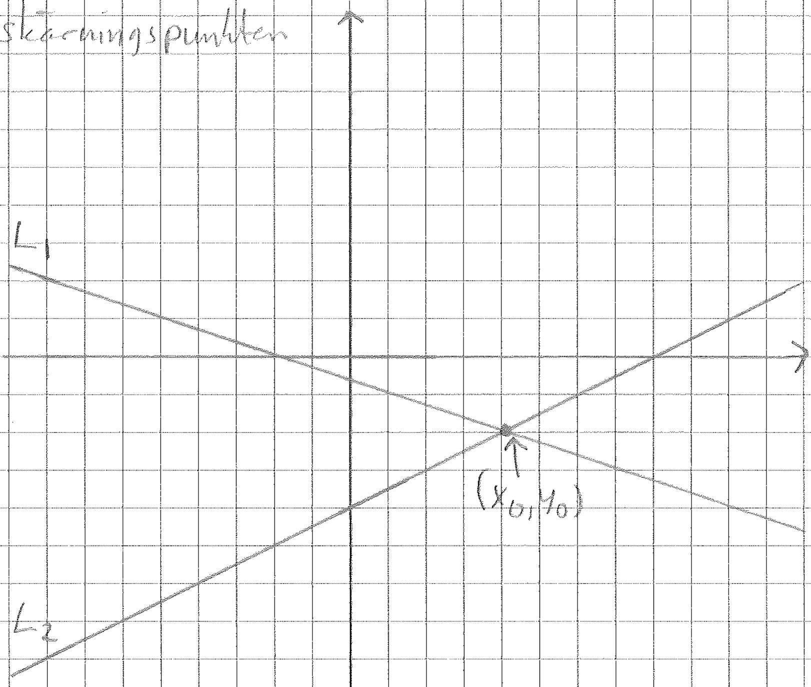


3-4

Två icke-parallella linjer i planet skär varandra i en punkt.

Exempel $L_1: \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -1-t \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2+2t \\ y = -5+t \end{cases}$

Låt (x_0, y_0) vara skärningspunkten



(x_0, y_0) på L_1

$\Updownarrow$

$\begin{cases} x_0 = 1+3t_1 \\ y_0 = -1-t_1 \end{cases}$ (1)

för något t_1.

(x_0, y_0) på L_2

$\Updownarrow$

$\begin{cases} x_0 = -2+2t_2 \\ y_0 = -5+t_2 \end{cases}$ (2)

Obs: t_1 och t_2 kan vara olika!

(1) och (2) ger $(x_0 =)\ 1+3t_1 = -2+2t_2$

$(y_0 =)\ -1-t_1 = -5+t_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t_1 - 2t_2 = -3 \\ -t_1 - t_2 = -4 \end{cases}$

Övning Lösningen ges av $t_1 = 1$ och $t_2 = 3$.

Stoppa in $t_1 = 1$ i (1) (eller $t_2 = 3$ i (2)):

$\begin{cases} x_0 = 1 + 3\cdot 1 = 4 \\ y_0 = -1 - 1 = -2 \end{cases}$

Svar. Punkten är $(4, -2)$

3-5

1.5.2 Linjer i rummet

Skrivs enklast på parameterform:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ut \\ y &= y_0 + vt \\ z &= z_0 + wt \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \ t \text{ varierar.}$$

Exempel.
$$\begin{cases} x = 27 + 15t \\ y = -10 - 7t \\ z = 3 + t \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 15 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Titta på exempel 1.42 på sid 59.

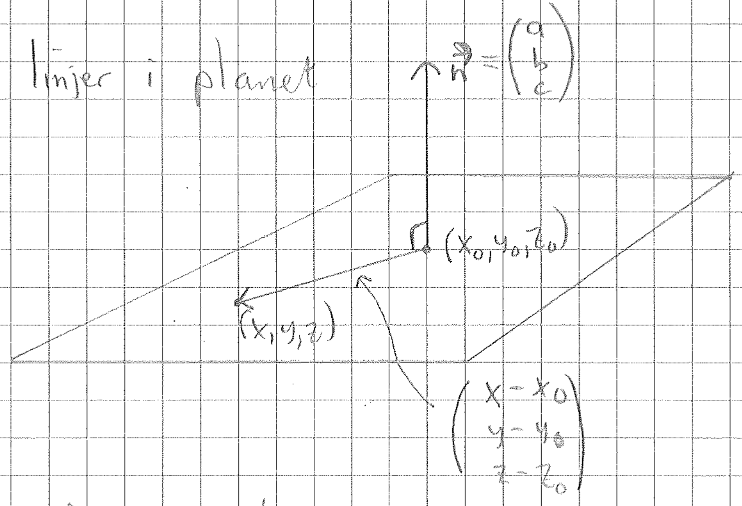
3-6

1.5.3 Planets ekvation

Ett plan i rummet innehållande punkten (x_0, y_0, z_0) och med normal $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ kan skrivas

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

Samma princip som för linjer i planet



Allmän formel för ett plan i rummet:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Exempel: $5x + 3y - 4z + 7 = 0$

$(a = 5,\ b = 3,\ c = -4,\ d = 7)$

Punkten $(-1, -2, -1)$ ligger i planet, så planet kan skrivas

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x + 1 \\ y + 2 \\ z + 1 \end{pmatrix}$$

$(x + 1 = x - (-1)$ osv.$)$

3-7

Om $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är icke-parallella vektorer, som är parallella med ett givet plan, så är

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \quad \text{(vektorprodukt)}$$

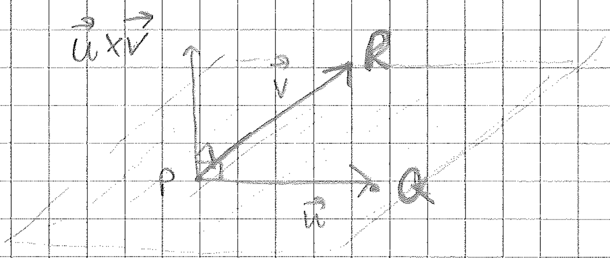
en normal till planet.

Exempel. Bestäm en ekvation för planet som innehåller punkterna $P = (1,0,1)$, $Q = (-1,1,1)$ och $R = (-2,0,2)$.

Lösning. Vi ser att
$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -1 - 1 \\ 1 - 0 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -2 - 1 \\ 0 - 0 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nu är



$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_x + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \vec{e}_y + \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_z$$

$$= 1 \cdot \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 3\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Planets ekvation är som bekant $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$,

där (x_0, y_0, z_0) är en punkt i planet, säg $(x_0, y_0, z_0) = P = (1,0,1)$

Vi får
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \\ z - 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1(x-1) + 2y + 3(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 2y + 3z - 4 = 0$$

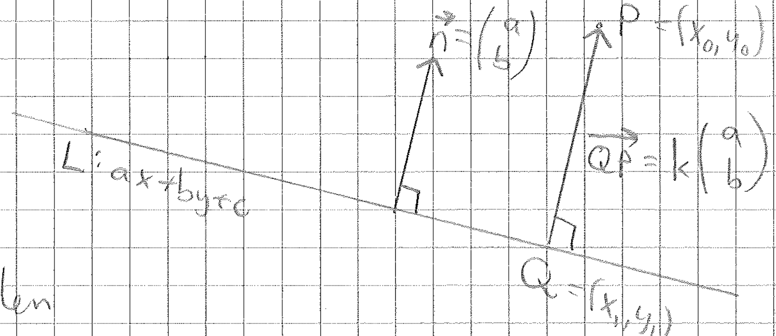
3 – 8

1.5.4. Avståndsberäkningar

Avstånd mellan punkt och linje i planet.

Låt $P = (x_0, y_0)$, och låt $ax + by + c = 0$ vara en linje L.

Kortaste avståndet från P till L: gå ortogonalt mot L, dvs parallellt med normalen $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.



Låt $Q = (x_1, y_1)$ vara punkten på L närmast P.

Obs: $\boxed{ax_1 + by_1 + c = 0}$

Då är $\begin{cases} \vec{QP} = k\vec{n} = k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix} & \text{för något } k \\ \vec{QP} = \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \end{pmatrix} \end{cases}$

Alltså: $\begin{cases} ka = x_0 - x_1 \\ kb = y_0 - y_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_0 - ka \\ y_1 = y_0 - kb \end{cases}$

Vi får
$$0 = ax_1 + by_1 + c = a(x_0 - ka) + b(y_0 - kb) + c$$
$$= ax_0 + by_0 + c - k(a^2 + b^2)$$
$$\iff k(a^2 + b^2) = ax_0 + by_0 + c \iff k = \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$$

Alltså är $\vec{QP} = \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, och avståndet

blir $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2} = \boxed{\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$

3-9

Exempel. $L: 5x-3y+2=0$ och $P=(3,2)$

Bestäm avståndet från P till L.

Normalen är $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $c=-2$, $(x_0, y_0) = (3,2)$,

så avståndet är $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{|5\cdot 3+(-3)\cdot 2+2|}{\sqrt{5^2+(-3)^2}}$

$$= \frac{11}{\sqrt{34}} \quad (\approx 1.88)$$

Avståndet från en punkt $P=(x_0, y_0, z_0)$ i rummet till planet $ax+by+cz+d=0$ ges av en liknande formel:

$$\text{Avstånd} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

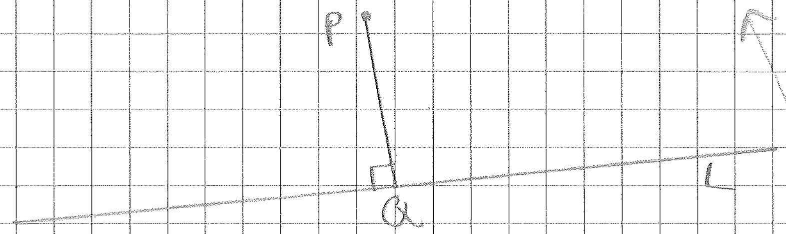
Härledningen är analog med föregående fall

(Se sid 68-69 och 71-72 för alternativa härledningar.)

Exempel i rummet

Bestäm avståndet mellan punkten $P = (1,2,6)$ och linjen

$$L: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -2 + t \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Samma princip som förut: gå ortogonalt från P mot linjen till närmaste punkten Q. Ansätt

$$Q = (x_1, y_1, z_1), \quad \begin{cases} x_1 = 1 + t_1 \\ y_1 = 2t_1 \\ z_1 = -2 + t_1 \end{cases} \text{ för något } t_1.$$

Vi får

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} (1+t_1) - 1 \\ (2t_1) - 2 \\ (-2+t_1) - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ 2t_1 - 2 \\ t_1 - 8 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ Q $\quad$ $\uparrow$ P

$\overrightarrow{PQ}$ är ortogonal mot riktningsvektorn $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, dvs

$$0 = \begin{pmatrix} t_1 \\ 2t_1 - 2 \\ t_1 - 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = t_1 \cdot 1 + (2t_1 - 2) \cdot 2 + (t_1 - 8) \cdot 1$$

$$= 6t_1 - 12$$

$0 = 6t_1 - 12 \iff 6t_1 = 12 \iff t_1 = 2$, så $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \cdot 2 - 2 \\ 2 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

Avståndet blir $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-6)^2} = \sqrt{44}$

Svar: $\sqrt{44}$

(Alternativa metoder: sid 69-70)