Avsnitt 1.1 – 1.2: Linjära ekvationssystem och matriser

Linjära ekvationer:

* I planet: $ax + by = c$ — definierar en linje
* I rummet: $ax + by + cz = d$ — definierar ett plan
* Allmän ekvation i n variabler $x_1, \ldots, x_n$:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = \cancel{d}\ \mathbf{b}$$ ← rättelse

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n,\ a, b, c, d$ är konstanter

Exempel. $2x_1 + 3x_2 - x_3 + \underbrace{0 \cdot x_4}_{=0} + 6x_5 = 7$

Linjärt ekvationssystem (LES) = system av linjära ekvationer

Exempel.
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 11 & \text{(ekv. 1)} \\ x + 2y + 3z = 14 & \text{(ekv. 2)} \end{cases}$$

Lösning till systemet = lösning till varje ekvation i systemet.

Exempel. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ löser ovanstående ekvation:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 = 11 & \text{(ekv. 1)} \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 14 & \text{(ekv. 2)} \end{cases}$$

Viktiga operationer vid lösning av LES:

* Vi kan multiplicera en ekvation med en nollskild konstant

Exempel: $x+2y+3z=14 \overset{\boxed{\text{ekvivalent}}}{\Leftrightarrow} (-2)(x+2y+3z)=(-2)\cdot 14$

$\Leftrightarrow -2x-4y-6z=-28$

Notation: $\boxed{x+2y+3z=14 \xleftarrow{\times} -2}$ (finns många varianter)

* Vi kan byta plats på två ekvationer

Exempel: $\begin{cases} 2x+3y+z=11 \\ x+2y+3z=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=14 \\ 2x+3y+z=11 \end{cases}$

Notation: $\boxed{\begin{cases} 2x+3y+z=11 \\ x+2y+3z=14 \end{cases}}$

* Vi kan ta en multipel av en ekvation och addera till en annan ekvation

Exempel: Ersätt $2x+3y+z=11$ med

$$\begin{array}{rl} & 2x+3y+z=11 \\ + & (-2)\cdot(x+2y+3z)=(-2)\cdot 14 \quad (\Leftrightarrow -2x-4y-6z=-28) \\ \hline & 0x+(-1)y+(-5)z=-17 \quad \Leftrightarrow \quad -y-5z=-17 \end{array}$$

Notation:

$$\boxed{\begin{cases} 2x+3y+z=11 \xleftarrow{+} \\ x+2y+3z=14 \xrightarrow{\times} -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y-5z=-17 \\ x+2y+3z=14 \end{cases}}$$

Ovanstående kallas <u>elementära radoperationer</u>

4-3 Exempel.

$$\begin{cases} 2x+3y+z=11 \\ x+2y+3z=14 \end{cases}$$ (praktiskt ha enkel x-term på första raden)

$$\begin{cases} x+2y+3z=14 & \cdot(-2) \\ 2x+3y+z=11 & + \end{cases}$$ (bort med x i rad 2)

$$\begin{cases} x+2y+3z=14 \\ -y-5z=-17 & \cdot(-1) \end{cases}$$ (minustecken är jobbiga)

$$\begin{cases} x+2y+3z=14 & + \\ y+5z=17 & \cdot(-2) \end{cases}$$ (bort med y i rad 1)

$$\begin{cases} x-7z=-20 \\ y+5z=17 \end{cases}$$ (kan inte bli enklare)

Sätt $z=t$. Vi får

$$x-7t=-20 \Leftrightarrow x=-20+7t$$
$$y+5t=17 \Leftrightarrow y=17-5t$$

Alltså:

$$\begin{cases} x=-20+7t \\ y=17-5t \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösningen till systemet är en linje i rummet.

Matriser ger smidigare lösningar.

Vi utelämnar alla x, y, z och skriver bara upp koefficienterna, och högerleden ← tillägg

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 11 \\ x + 2y + 3z = 14 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right]$$

Elementära radoperationer:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \end{array}\right] \begin{array}{l} \times(-2) \\ + \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -1 & -5 & -17 \end{array}\right] \times(-1)$$

(och så vidare)

En matris är en rektangulär struktur med element ordnade i rader och kolumner.

Storleken betecknas $r \times k$, där r = antal rader och k = antal kolumner.

Allmän 2×4-matris: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$

3×3-matris: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

1×5-matris: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix}$

a_{ij} = elementet i rad i och kolumn j.

4 - (5)

Vi använder stora bokstäver för matriser: $A, B, C, \ldots$

Observera att en vektor är en matris med en enda kolumn:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Mängden av alla vektorer med n element $= \mathbb{R}^n$

Vi kallar denna mängd ett <u>vektorrum</u>

$\mathbb{R}^2$ = planet $\qquad$ $\mathbb{R}^3$ = rummet

Tidigare skrev vi $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, men $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ är samma sak.

4-6

<u>Totalmatrisen</u> hörande till ett LES är matrisen bestående av alla koefficienter i systemet. och högerleden! ← tillägg

Exempel.
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 8x_4 = 2 \\ x_2 - 4x_3 = 3 \\ x_1 - 7x_4 = 6 \end{cases}$$

Totalmatris:

$$\begin{array}{r} \text{ekv. 1} \rightarrow \\ \text{ekv 2} \rightarrow \\ \text{ekv 3} \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -6 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -7 & 6 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cccc|c} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \text{högerled} \end{array}$$

avgränsar vänster- och högerled

Reducerad trappstegsmatris (reduced row-echelon form)

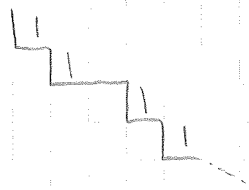
$$\begin{bmatrix} 0 & \underline{1} & 3 & 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Första nollskilda elementet i varje rad = $\underline{1}$ (ledande 1:a)

Eventuella nollrader på slutet

I kolumner med ledande etta: inga andra nollskilda element

Ledande ettor bildar en trappstege:



Totalmatris som är reducerad trappstege:

* Ledande variabel = variabel i kolumn med ledande 1:a
* Fri variabel = annan variabel.

Motsvarande LES är lätt att lösa: sätt varje fri variabel lika med en parameter: $s, t, u, \ldots$

Exempel

$$\begin{array}{c}\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & \underline{1} & 3 & 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccccc} x_1 & \underline{x_2} & x_3 & \underline{x_4} & \underline{x_5} & x_6 & HL \end{array}\end{array} \iff \left\{\begin{array}{l} \underline{x_2} + 3x_3 + 2x_6 = 11 \\ \underline{x_4} + x_6 = 2 \\ \underline{x_5} + 4x_6 = -3 \\ 0 = 0 \end{array}\right.$$

Ledande : x_2, x_4, x_5

Fria : x_1, x_3, x_6

Sätt $x_1 = s$, $x_3 = t$, $x_6 = u$. Detta ger

$$\begin{aligned} x_2 + 3t + 2u &= 11 &\iff x_2 &= 11 - 3t - 2u \\ x_4 + u &= 2 &\iff x_4 &= 2 - u \\ x_5 + 4u &= -3 &\iff x_5 &= -3 - 4u \end{aligned}$$

Så den allmänna lösningen är

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = s \\ x_2 = 11 - 3t - 2u \\ x_3 = t \\ x_4 = 2 - u \\ x_5 = -3 - 4u \\ x_6 = u \end{array}\right.$$

(Glöm inte bort variabler i nollkolumner, som x_1 i exemplet.)

Om någon rad har formen $[\,0\ 0\ 0 \ldots 0 \,|\, 1\,]$, så saknar systemet lösning, ty motsvarande ekvation är $0 = 1$

Gauss-Jordans metod

Använd elementära radoperationer för att få en matris på reducerad trappstegsform.

Exempel.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 9 & 4 \\ 3 & -5 & 6 & 5 \\ 4 & -7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & -4 \\ 3 & -5 & 6 & 5 \\ 4 & -7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 4 & -7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Läs mer om saken i boken.