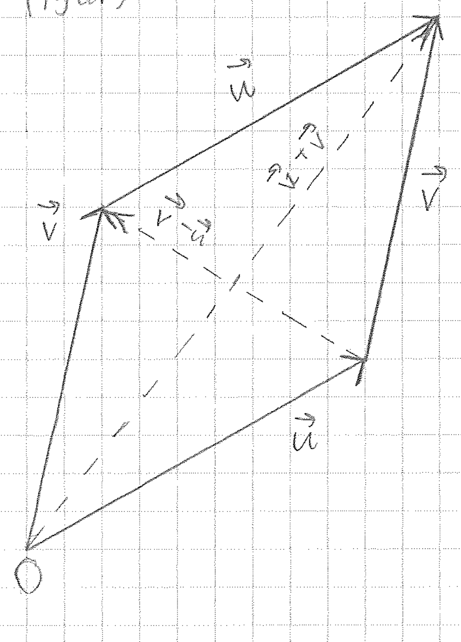
Räkning med vektorer (Särtryck)

Låt P vara en parallellogram med sidor av längd a_1 och a_2. Låt diagonalernas längder vara d_1 och d_2. Visa att

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a_1^2 + a_2^2) \quad \text{(parallellogramlagen)}$$

Lösning. Placera ett av hörnen i P i origo.
Låt $\vec{u}$ och $\vec{v}$ beteckna vektorerna från detta hörn till de två närmaste hörnen (se figur)



Diagonalernas längder är

$$d_1 = |\vec{v} - \vec{u}| \quad \text{och} \quad d_2 = |\vec{u} + \vec{v}|$$

(eller vice versa). Detta ger att

$$d_1^2 + d_2^2 = |\vec{v} - \vec{u}|^2 + |\vec{u} + \vec{v}|^2$$

$$= (\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u})$$

$$+ (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$$

$$= \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$= 2\vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{v} \cdot \vec{v} = 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2$$

Sidornas längd a_1 och a_2 är just $|\vec{u}|$ och $|\vec{v}|$, så

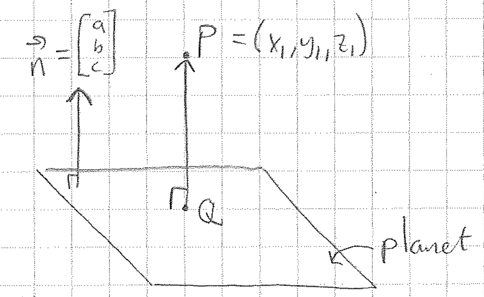
$$d_1^2 + d_2^2 = 2a_1^2 + 2a_2^2,$$

vilket skulle visas.

Avstånd mellan punkt och plan i $\mathbb{R}^3$ (särtryck)

Låt $P = (x_1, y_1, z_1)$ vara en punkt i $\mathbb{R}^3$, och låt $ax + by + cz + d = 0$ vara ekvationen för ett plan.

* Vilken punkt Q i planet ligger närmast P?
* Vad är avståndet?



Den närmaste punkten $Q = (x_0, y_0, z_0)$ har egenskapen att vektorn $\overrightarrow{QP}$ är ortogonal mot planet, dvs parallell med normalvektorn $\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. Alltså finns skalär k så att

$$\overrightarrow{QP} = k\vec{n} \iff \underset{P \quad\;\; Q}{\begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{bmatrix}} = k \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 - x_0 = ka \\ y_1 - y_0 = kb \\ z_1 - z_0 = kc \end{cases}$$

Lös ut Q, dvs (x_0, y_0, z_0):

$$\begin{cases} x_0 = x_1 - ka \\ y_0 = y_1 - ka \\ z_0 = z_1 - ka \end{cases}$$

Vi vet att $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$, ty Q ligger i planet. Men

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = a(x_1 - ka) + b(y_1 - kb) + c(z_1 - kc) + d$$
$$= ax_1 - ka^2 + by_1 - kb^2 + cz_1 - kc^2 + d$$
$$= (ax_1 + by_1 + cz_1 + d) - k(a^2 + b^2 + c^2)$$

Detta är lika med noll, så $k = \dfrac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$

Q erhålls från P genom att subtrahera $k\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \overrightarrow{QP}$.

(forts.)

(forts)

<u>Exempel</u> $P = (x_1, y_1, z_1) = (2, -2, 1)$.

Planet: $3x + y - 2z + 5 = 0$ $\quad ((a,b,c,d) = (3,1,-2,5))$

Då är $\overrightarrow{QP} = k\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, där

$$k = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3\cdot 2 + 1\cdot(-2) + (-2)\cdot 1 + 5}{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2},$$

så $\overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$

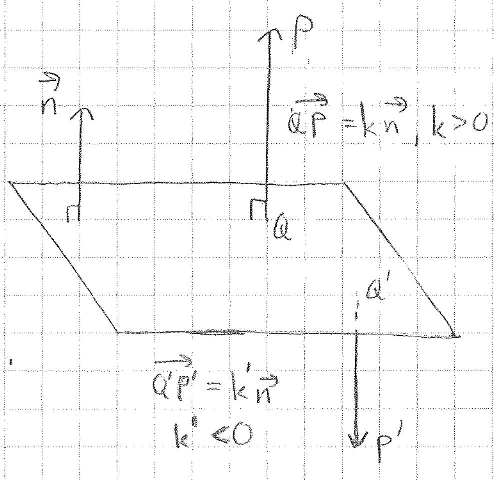
Detta ger $Q = P - \overrightarrow{QP} = (2,-2,1) - (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1) = (\frac{1}{2}, \frac{-5}{2}, 2)$

Avstånd mellan P och Q $= |\overrightarrow{QP}| = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{14}$.

Följdfråga: Ligger P och origo på samma sida om planet?

Tolkning av tecknet på

$$k = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3x_1 + y_1 - 2z_1 + 5}{14}$$



* Om $k > 0$, pekar $\overrightarrow{QP}$ och $\vec{n}$ åt samma håll.
* Om $k < 0$, pekar $\overrightarrow{QP}$ och $\vec{n}$ åt motsatta håll.
* Om $k = 0$, ligger P i planet.

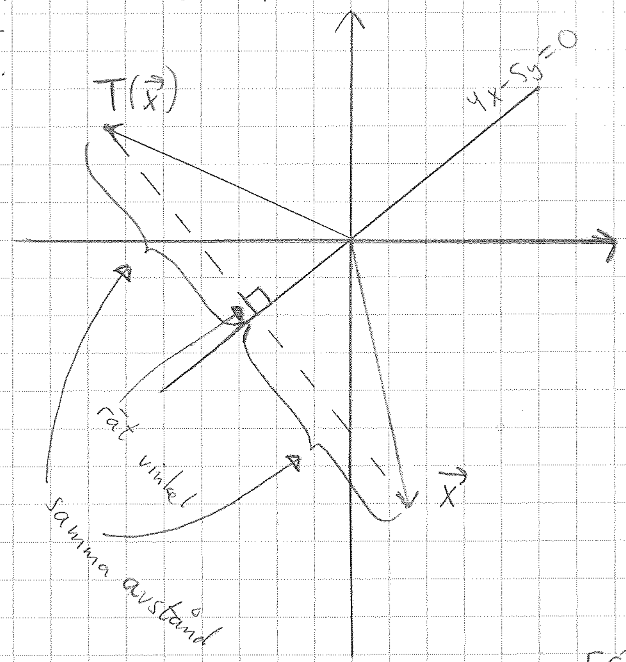
$(x_1, x_2, x_3) = (2,-2,1)$ ger $k = \frac{1}{2} > 0$

$(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0) =$ origo ger $k = \frac{0+0+0+5}{14} = \frac{5}{14} > 0$

Båda k-värdena har samma tecken, så P och $(0,0,0)$ ligger på samma sida om planet.

Spegling i linje (avsnitt 2.2)

Låt T vara spegling i linjen $4x - 5y = 0$.
Bestäm standardmatrisen för T.

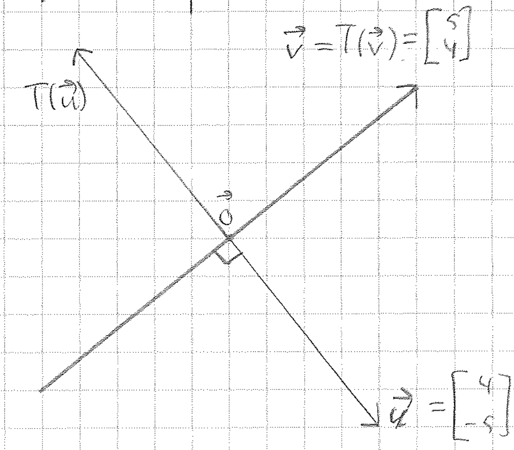


Lösning. T avbildar vektorer parallella med speglingslinjen på sig själva och normalvektorer på minus sig själva.

Linjens ekvation:

$$4x - 5y = 0 \iff \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0,$$

så $\vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ är en normal.



Och $4x - 5y = 0 \iff \begin{cases} x = \frac{5}{4}t \\ y = t \end{cases}$

$$\iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 5/4 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{t}{4} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix},$$

så $\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ är parallell med linjen.

Låt A vara standardmatrisen. Vi får att $\begin{cases} A\vec{u} = -\vec{u} & \text{(normal)} \\ A\vec{v} = \vec{v} & \text{(parallell med linjen)} \end{cases}$

$$\iff A \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{u} & \vec{v} \end{bmatrix} \iff A \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\iff A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{16+25} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{41} \begin{bmatrix} 9 & 40 \\ 40 & -9 \end{bmatrix}$$

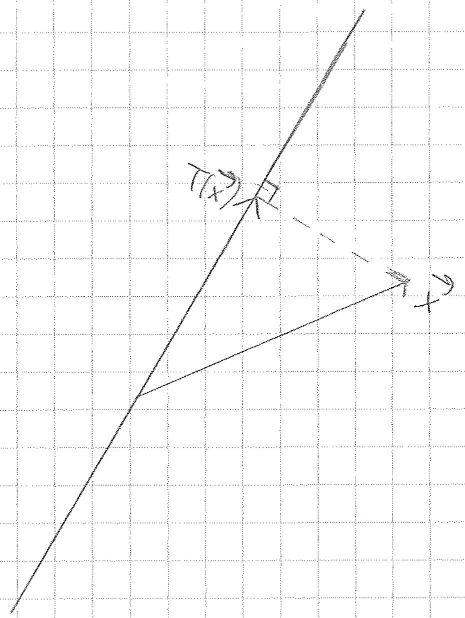
Svar. Standardmatrisen är $\frac{1}{41} \begin{bmatrix} 9 & 40 \\ 40 & -9 \end{bmatrix}$

[Observera: $A = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{bmatrix}^{-1} = SDS^{-1}$]

Ortogonal projektion på linje (avsnitt 2.2)

Låt T vara ortogonal projektion på linjen $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^3$.

Bestäm standardmatrisen för T.



Lösning. Projektionen på en linje med riktningsvektor $\vec{u}$ ges av formeln

$$T(\vec{v}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$$

Vi kan välja $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, vilket ger

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = 2^2 + (-1)^2 + 3^2 = 14$$

Vi ser att

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \frac{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}}{14}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{2x-y+3z}{14}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 2(2x-y+3z) \\ -1(2x-y+3z) \\ 3(2x-y+3z) \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 4x-2y+6z \\ -2x+y-3z \\ 6x-3y+9z \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad (*)$$

[Alternativ: räkna ut $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ och $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ och bilda matrisen

$$\begin{bmatrix} T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) & T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) & T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}$$

Samma matris som i $(*)$]

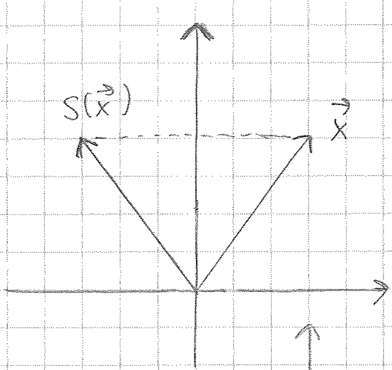
Svar: $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$

Rotation och spegling (avsnitt 2.2)

Låt S vara spegling i y-axeln, och låt R vara rotation moturs med $\frac{\pi}{6}$ radianer. Låt T vara sammansättningen $S \circ R^{-1} \circ S \circ R$.

(a) Beräkna $T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$ och $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$.

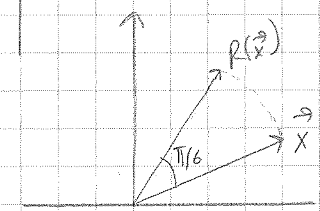
(b) Beskriv T geometriskt.



Lösning. Matrisen för S är $A = \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$,

dvs $S\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-x\\y\end{bmatrix}$.

Matrisen för R är



$$B = \begin{bmatrix}\cos \pi/6 & -\sin \pi/6\\ \sin \pi/6 & \cos \pi/6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt{3}/2 & -1/2\\ 1/2 & \sqrt{3}/2\end{bmatrix}$$

Matrisen för inversen R^{-1} är $B^{-1} \underset{\substack{\uparrow\\ B \text{ ortogonal}}}{=} B^T = \begin{bmatrix}\sqrt{3}/2 & 1/2\\ -1/2 & \sqrt{3}/2\end{bmatrix}$

Vi ser att $S \circ R^{-1} \circ S \circ R\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = S \circ R^{-1} \circ S\left(\begin{bmatrix}\sqrt{3}/2 & -1/2\\ 1/2 & \sqrt{3}/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$

$$= S \circ R^{-1} \circ S\left(\begin{bmatrix}\sqrt{3}/2\\ 1/2\end{bmatrix}\right) = S \circ R^{-1}\left(\begin{bmatrix}-\sqrt{3}/2\\ 1/2\end{bmatrix}\right)$$

$$= S\left(\begin{bmatrix}\sqrt{3}/2 & 1/2\\ -1/2 & \sqrt{3}/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sqrt{3}/2\\ 1/2\end{bmatrix}\right) = S\left(\begin{matrix}-1/2\\ \sqrt{3}/2\end{matrix}\right) = \begin{bmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\end{bmatrix}$$

och $S \circ R^{-1} \circ S \circ R\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = S \circ R^{-1} \circ S\left(\begin{bmatrix}-1/2\\ \sqrt{3}/2\end{bmatrix}\right) = S \circ R^{-1}\left(\begin{bmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\end{bmatrix}\right)$

$$= S\left(\begin{bmatrix}\sqrt{3}/2 & 1/2\\ -1/2 & \sqrt{3}/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\end{bmatrix}\right) = S\left(\begin{bmatrix}\sqrt{3}/2\\ 1/2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-\sqrt{3}/2\\ 1/2\end{bmatrix}$$

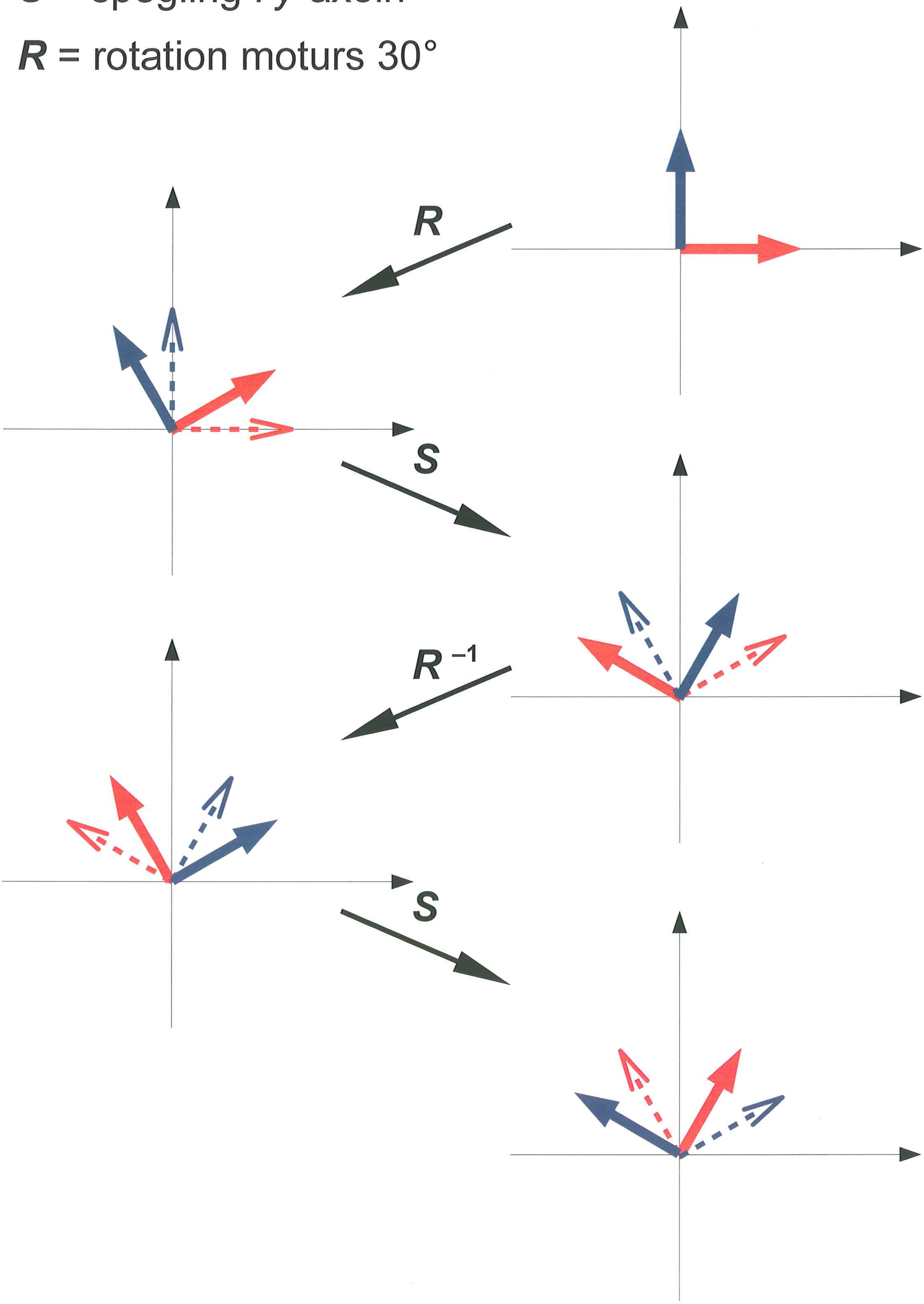
Sammanfattning: $T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\end{bmatrix}$ och $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-\sqrt{3}/2\\ 1/2\end{bmatrix}$

(b) Matrisen för T är $\left[T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) \;\; T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\right] = \begin{bmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}\cos \pi/3 & -\sin \pi/3\\ \sin \pi/3 & \cos \pi/3\end{bmatrix}$, dvs T är rotation $\pi/3$ rad moturs.

S = spegling i *y*-axeln

R = rotation moturs 30°



Inversen av en avbildning (24)

Låt $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ha egenskapen att $\begin{cases} T\left(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} \end{cases}$

(a) Motivera att T är inverterbar.

(b) Bestäm standardmatrisen för T^{-1}.

Lösning. (a) Vi ser att $\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$ ligger i bilden av T, och dessa vektorer utgör en bas för $\mathbb{R}^2$.

Bilden av $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är lika med $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow T$ är inverterbar

(b) Vi har att $\begin{cases} T\left(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} \Leftrightarrow T^{-1}\left(\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} \Leftrightarrow T^{-1}\left(\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} \end{cases}$

Standardmatrisen A för T^{-1} uppfyller alltså

$$A\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}, \text{ dvs}$$

$$A\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 2\end{bmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & 4\end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 2\end{bmatrix}\frac{1}{9}\begin{bmatrix}4 & -1\\1 & 2\end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}6 & 3\\14 & 1\end{bmatrix}$$

Svar: $\frac{1}{9}\begin{bmatrix}6 & 3\\14 & 1\end{bmatrix}$

Kontroll: $\frac{1}{9}\begin{bmatrix}6 & 3\\14 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}9\\27\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$

$\frac{1}{9}\begin{bmatrix}6 & 3\\14 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}18\\18\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$

Basbyten (avsnitt 3.4)

Låt $B = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$

$C = \left\{ \vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{w}_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$

Anta att $\vec{u}$ har koordinatvektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ i basen B.
Uttryck $\vec{u}$ i basen C.

Lösning. Att $[\vec{u}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ innebär att

$$\vec{u} = 1 \cdot \vec{v}_1 + 2 \cdot \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Vi vill uttrycka $\vec{u}$ i basen C. Sätt $[\vec{u}]_C = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Då är

$$x\vec{w}_1 + y\vec{w}_2 = \vec{u} \iff \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \vec{w}_1 \quad \vec{w}_2 \end{array} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 14 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 21 \\ 0 & -1 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \end{array}\right],$$

dvs $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}$

Svar. Koordinatvektorn i basen C är $\begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}$

Observera: Vi kan skriva $\begin{bmatrix} 5 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, så ekvationen $(*)$ kan skrivas

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}^{-1} \right) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Basbyten (avsnitt 4.3)

Låt V vara planet $x+y+z=0$ i $\mathbb{R}^3$. Studera baserna

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{och} \quad C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ för planet } V.$$

Låt $\vec{u}$ ha koordinatvektorn $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ i basen C

($\vec{u}$ är en godtycklig vektor i planet V)

Bestäm koordinatvektorn för $\vec{u}$ i basen B

Lösning Vi har att $[\vec{u}]_C = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, dvs

$$\vec{u} = y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - 2y_2 \\ -2y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

Vi vill hitta $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ så att $[\vec{u}]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, dvs

$$\vec{u} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

Detta ger $\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - 2y_2 \\ -2y_1 + y_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 + y_2 & (\mathrm{I}) \\ -x_1 = y_1 - 2y_2 & (\mathrm{II}) \\ -x_2 = -2y_1 + y_2 & (\mathrm{III}) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -y_1 + 2y_2 & (\mathrm{II}) \\ x_2 = 2y_1 - y_2 & (\mathrm{III}) \end{cases}$$

(detta ger $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, dvs (I))

Svar. Koordinatvektorn i basen B är

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1 + 2y_2 \\ 2y_1 - y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$