Institutionen för matematik
KTH

Förslag till lösningar till tentamensskrivning i SF1628, Komplex analys, 2009-06-01

1. Integranden är

$$f(z) = \frac{1}{(z+5)^2(z+1)},$$

som har två poler $z = -5$ och $z = -1$. Den enda polen innanför cirkeln $|z| = 2$ är $z = -1$ som är en enkelpol. Vi får

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f, z=-1] &= \lim_{z\to 1}\left((z+1)\cdot\frac{1}{(z+5)^2(z+1)}\right)\\ &= \left[\frac{1}{(z+5)^2}\right]_{z=-1} = \frac{1}{16}.\end{aligned}$$

Residusatsen ger

$$\int_C \frac{1}{(z+5)^2(z+1)}\,dz = 2\pi i\cdot\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{\pi i}{8}.$$

Svar. Den sökta integralen är $\pi i/8$.

2. Vi får

$$\begin{aligned}z\sin\frac{z}{z+1} &= z\sin\left(1-\frac{1}{z+1}\right) = z\left(\sin 1\cdot\cos\frac{1}{z+1} - \cos 1\cdot\sin\frac{1}{z+1}\right)\\ &= (z+1)\left(\sin 1\cdot\cos\frac{1}{z+1} - \cos 1\cdot\sin\frac{1}{z+1}\right)\\ &\quad -\left(\sin 1\cdot\cos\frac{1}{z+1} - \cos 1\cdot\sin\frac{1}{z+1}\right).\end{aligned}$$

Vi sätter sedan in Taylorutvecklingarna

$$\begin{cases}\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}\\ \sin z = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!}z^{2m+1}\end{cases}$$

och erhåller efter identifikation av de olika termerna

$$a_n = \begin{cases}a_1 = \sin 1\\ a_{-2k} = (-1)^{k+1}\left(\frac{\cos 1}{(2k+1)!} + \frac{\sin 1}{(2k)!}\right), & k = 0, 1, \ldots\\ a_{-2\ell-1} = (-1)^{\ell+1}\left(\frac{\sin 1}{(2\ell+2)!} - \frac{\cos 1}{(2\ell+1)!}\right), & \ell = 0, 1, \ldots\end{cases}$$

3. Låt $p(z) = z^8 + 5z + 3$ och skriv $p(z) = f(z) + g(z)$ där $f(z) = 5z$ och $g(z) = z^8 + 3$. Då $|z| = 1$ fås

$$|g(z)| = |z^8 + 3| \leq |z|^8 + 3 = 4 < 5 = |5z| = |f(z)|.$$

Eftersom $f(z)$ har 1 nollställe räknade med multiplicitet i $|z| < 1$ fås enligt Rouchés sats att den givna funktionen $p(z) = f(z) + g(z)$ har 1 nollställe där.

Svar. Den funktionen har 1 nollställe innanför enhetscirkeln.

4. Den givna integralen beräknas genom att beräkna konturintegralen av funktionen

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 5}$$

längs kurvan $\Gamma_R = I_R + C_R$ där I_R är det reella linjestycket från $-R$ till R och C_R är halvcirkelbågen $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ från $z = R$ till $z = -R$. Residusatsen get att

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z), \tag{1}$$

där $z_0 = -1 + 2i$ är lösningen till ekvationen $z^2 + 2z + 5 = 0$ i övre halvplanet.

Residun är då enligt formeln för residun i en enkelpol

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \left(\frac{e^{iz}}{2z+2}\right)\Big|_{z=-1+2i} = e^{-2-i}/4i = \frac{e^{-2}}{4}(-i\cos 1 + \sin 1)$$

Integralen längs halvcirkeln kan uppskattas enligt följande

$$\Big|\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 5}\, dz\Big| \leq \int_{C_R} \frac{e^{-y}}{R^2 - 2R - 5}\, |dz| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 2R - 5} \to 0$$

då $R \to \infty$.

Efter att ha tagit realdel i (1) och låtit $R \to \infty$ erhåller man slutligen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 2x + 5}\, dx = 2\pi \frac{e^{-2}}{4} \cos 1.$$

Svar. Integralen blir $\frac{\pi}{2} e^{-2} \cos 1$.