Institutionen för matematik
KTH
Michael Benedicks

Lösningsförslag till tentamen i Komplex analys, SF1628, den 24 oktober 2009

1. Beräkna integralen

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^3+1}\,dz$$

där γ är den positivt orienterade triangeln med hörn i 0, $1-i$ och $1+i$

Lösning Funktionen z^3+1 har tre nollställen i $-1, e^{\pm\frac{1}{3}\pi i}$. Inga av dessa nollställen ligger inom kurvan, vilket betyder att integranden är en analytisk funktion i inre området. Enligt Cauchys sats är integralen lika med 0.

2. Bestäm de fyra första termerna i Taylorserien till funktionen

$$f(z) = \frac{\mathrm{Log}(1+z)}{1-z}$$

omkring origo. Ange också konvergensradien. Log betecknar som brukligt principalgrenen av logaritmen.

Lösning Logaritmen har Taylorserie

$$\mathrm{Log}(1+z) = z - z^2/2 + z^3/3 - ...$$

i origo och

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Båda serieutvecklingar är giltiga där $|z| < 1$. Därför fås

$$\begin{aligned}&(z - z^2/2 + z^3/3 - z^4/4 + ...)(1 + z + z^2 + z^3 + ...)\\ &= z + (1-1/2)z^2 + (1-1/2+1/3)z^3 + (1-1/2+1/3-1/4)z^4 + ...\end{aligned}$$

Enligt sats 5.4.17 i boken är konvergensradien lika med avståndet från utvecklingspunkten till närmaste singularitet. Därför är konvergensradien 1.

3. Hur många lösningar har ekvationen

$$\cos z + z^3 = 0$$

inuti cirkeln $|z| = 3$.

Lösning Om $|z| = |x+iy| = 3$,

$$|\cos z| = \left|\frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2}\right| \le \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} \le e^3 < 3^3,$$

vilket innebär att $|\cos z| < |z^3|$ på cirkeln $|z| = 3$. Det följer från Rouches sats, att $\cos z + z^3$ har lika många nollställen inuti cirkeln $|z| = 3$ som z^3. Funktionen z^3 har tre nollställen i detta område (alla i origo). Svaret: tre nollställen.

4. Beräkna den reella integralen

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^3}.$$

Lösning Residusatsen ger

$$(1) \qquad \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(1+x^2)^3} + \int_{C_R} \frac{dz}{(1+z^2)^3} = 2\pi i \cdot \sum \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)^3}\right],$$

där summan går över alla poler övre halvplanet.

Låt

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^3} = \frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}.$$

Då funktionen f en pol av grad tre i punkten i. Enligt regel III i kapitel 6.3, har man

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f,i] &= \lim_{z\to i} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-i)^3 f(z)\right] \\ &= \lim_{z\to i} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{(z+i)^3}\right] = 6(2i)^{-5} = -\frac{3}{16}i.\end{aligned}$$

Vi uppskattar integralen över halvcirkeln enligt följande:

$$\left|\int_{C_R} \frac{dz}{(1+z^2)^3}\right| \le \int_{C_R} \frac{|dz|}{(|z|^2-1)^3} \le \frac{\pi R}{(R^2-1)^3} \to 0$$

då $R \to \infty$.

Då $R \to \infty$ i (1) fås att den sökta integralen är lika med $2\pi i \cdot (-3/16)i = 3/8\pi$.