Institutionen för matematik
KTH
Michael Benedicks

Lösningsförslag till tentamen i Komplex analys, SF1628, den 24 oktober 2009

1. Finn $a > 0$ så att det finns en analytisk funktion med realdel

$$e^{x^2-y^2} \cos axy.$$

Bestäm sedan *alla* sådana funktioner.

Lösning. Kalla funktionen $u = u(x, y)$. Denna måste vara harmonisk. Efter partialderivering två gånger med avseende på x och y får man

$$\Delta u = \left(-a^2(x^2 + y^2) + 4(x^2 + y^2)\right) e^{x^2-y^2} \cos axy.$$

$\Delta u = 0$ ger nu at $a^2 = 4$ och den enda positiva lösningen är $a = 2$. Man kan nu använda Cauchy-Riemanns differentialekvationer att bestämma alla konjugerade funktioner v till $u(x, y) = e^{x^2-y^2} \cos 2xy$, som ges av

$$v(x, y) = e^{x^2-y^2} \sin 2xy + C.$$

En alternativ metod till Cauchy-Riemann är att observera at

$$u = \text{Re } e^{z^2}.$$

Beteckna funktionen e^{z^2} med $f(z)$.

Antag att vi har en annan funktion $g = g(z)$ sådan att

$$\text{Re } e^{z^2} = e^{x^2-y^2} \cos 2xy.$$

Enligt Cauchy-Riemanns ekvationer får vi då

$$\partial_x[\text{Im}(f - g)] = -\partial_y[\text{Re}(f - g)] = 0,$$
$$\partial_y[\text{Im}(f - g)] = \partial_x[\text{Re}(f - g)] = 0.$$

vilket medför att $\text{Im}(f - g) = \text{konstant}$.

Svar. $e^{z^2} + iC$, där C är en reell konstant.

2. Låt oss använda grenen som är definierad av

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg(z) < 2\pi\},$$

dvs. komlexa talplanet uppskuret längs den positiva reella axeln $[0, \infty)$. Vi har $f(-1)\pi i$ och

$$\begin{cases} f'(z) = \frac{1}{z} \\ f''(z) = -\frac{1}{z^2} \\ \vdots \\ f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}(n-1)!z^{-n}. \end{cases}$$

vilket ger att $f^{n)}(-1) = -(n-1)!$. Taylorserien ges av

$$\pi i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{n)}(-1)}{n!}$$
$$= \pi i - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{n}$$

Enligt sats 5.4.17 i boken är konvergensradien lika med avståndet från utvecklingspunkten till närmaste singularitet. Därför är konvergensradien 1.

3. Hur många lösningar har ekvationen
$$z^5 + 2z^3 + 15z^2 + z + 1 = 0$$
i den öppna cirkelskivan $|z| < 2$?

Lösning. Välj $f(z) = 15z^2$ och $g(z) = z^5 + 2z^3 + z + 1$.

Då $|z| = |x + iy| = 2$ fås
$$|g(z)| \leq 1 + |z| + 2|z|^3 + |z|^5 = 1 + 2 + 2\dot{8} + 32 = 51 < 60 = |15z^2| = |f(z)|.$$
Det följer från Rouches sats, att $f(z) + g(z)$ har lika många nollställen inuti cirkeln $|z| = 2$ som $f(z)$. Funktionen $f(z) = 15z^2$ har två nollställen i detta område (alla i origo).

Svar. Funktioen har två nollställen.

4. Beräkna integralen
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)^2}\, dx.$$

Lösning.

Betrakta funktionen
$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2},$$
och integrera f runt den enkla slutna kurvan Γ_R som består av halvcirkeln C_R i det övre halvplanet med radie R, samt linjen från $z = -R$ till $z = R$. Nämnaren $(z^2 + 4)^2$ kan skrivas som $(z - 2i)^2(z + 2i)^2$ medan täljaren e^{iz} är skild från noll för alla z. Därmed ser vi att det finns två poler av andra ordningen, varav polen $z = 2i$ är den enda som ligger innanför Γ_R (om vi utan inskränkning antar att $R > 2$). Residysatsen ger
$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{(x^2+4)^2}\, dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}\, dz = 2\pi i \mathrm{Res}[f(z), 2i]$$
$$= 2\pi i \frac{d}{dz}(z-2i)^2 \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}\bigg|_{z=2i} = 2\pi i \frac{d}{dz} \frac{e^{iz}}{(z+2i)^2}\bigg|_{z=2i}$$
$$= 2\pi i \frac{(z+2i)^2 i e^{iz} - 2(z+2i)e^{iz}}{(z+2i)^4}\bigg|_{z=2i} = \frac{3\pi}{16e^2}.$$

På C_R kan vi använda ML-olikheten. L fås som πR, och då $|z^2 + 4| \geq |z|^2 - 4 = R^2 - 4$ får vi att
$$\left|\frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}\right| \leq \frac{e^{-y}}{R^4 - 8R^2 + 16} \leq \{y \geq 0 \text{ på } C_R\} \leq \frac{1}{R^4 - 8R^2 + 16} \leq M.$$

Nu ser vi att

$$0 \leq \left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}\, dz \right| \leq ML = \frac{\pi R}{R^4 - 8R^2 + 16} \to 0, \qquad R \to \infty.$$

Detta ger avslutningsvis att

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{(x^2+4)^2}\, dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+4)^2}\, dx = \frac{3\pi}{16e^2},$$

och om vi identifierar realdelarna i sista ekvationen fås

$$\textbf{Svar:} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)^2}\, dx = \frac{3\pi}{16e^2}.$$

5. Finn en Möbiustransformation (bilinjär avbildning) sådan att $z_1 = 1$ avbildas på $w_1 = 0$, $z_2 = i$ avbildas på $w_2 = -2$ och $z_3 = -i$ på $w_3 = -1 - i$.

På vilket område avbildas enhetscirkelskivan $|z| < 1$ under denna avbildning?

Lösning. Vi använder satsen om dubbelförhållandet (Theorem 4, s.546/kapitel 8.4 i Wunsch) för att hitta Möbiustransformationen,

$$\frac{w - w_1}{w_2 - w_1} : \frac{w - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} : \frac{z - z_3}{z_2 - z_3}$$

eller alternativt (med bokens skrivsätt)

$$\frac{(w_1 - w_2)(w_3 - w)}{(w_1 - w)(w_3 - w_2)} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z)}{(z_1 - z)(z_3 - z_2)}.$$

Här fås med $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -i, w_1 = 0, w_2 = -2, w_3 = -1 - i$ fås

$$\begin{aligned}
\frac{(0 - (-2)(-1 - i - w)}{(0 - w)(-1 - i - (-2))} &= \frac{(1 - i)(-i - z)}{(1 - z)(-i - i)} \iff \\
(2(-1 - i) - 2w)(1 - z)(-2i) &= -w(1 - i)2(-i - z) \iff \\
-2 - 2i(1 - z) - 2w(1 - z) &= w(i + z) \iff \\
w(-2(1 - z) - i - z) &= 2 + 2i + (-2 - 2i)z \iff \\
w &= \frac{-2 - 2i + (2 + 2i)z}{2 + i - z}.
\end{aligned}$$

Då nu z_1, z_2, z_3 tillhör randen $T = \{|z| = 1\}$ till enhetscirkelskivan och w är en Möbiustransformation vet vi att bilden av T är cirkeln genom w_1, w_2, w_3 som enkelt inses har ekvation $|w + 1| = 1$. För att verifiera att det inre av enhetscirkelskivan går på det inre av bildcirkeln avbildar vi t.ex. $0 \in U = \{|z| < 1\}$ och får

$$w(0) = \frac{-2 - 2i}{2 + i} = -\frac{6}{5} - \frac{2}{5}i \in \{|w + 1| < 1\}.$$

Det följer nu att $w = w(z)$ avbildar U på $\{|w + 1| < 1\}$.