10.3.18.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1 - x^2 - 3y^2) \\ y(3 - x^2 - 3y^2) \end{pmatrix} = \mathbf{g}(\mathbf{X})$$

Kritiska punkter: $\begin{pmatrix} x(1 - x^2 - 3y^2) \\ y(3 - x^2 - 3y^2) \end{pmatrix} = \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$

$$(0,0),\ (0,\pm 1),\ (\pm 1,0)$$

$$\mathbf{g}'(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 1 - 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ -2xy & 3 - x^2 - 9y^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Positiva egenvärden.}$$

$(0,0)$ är instabil nod.

$$\begin{cases} \mathbf{g}'(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{Negativa egenvärden.} \\ (0,\pm 1) \text{ är stabila noder.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{g}'(\pm 1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Olika tecken på egenvärdena.} \\ (\pm 1,0) \text{ är sadelpunkter.} \end{cases}$$

Alternativ lösning.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(1 - x^2 - 3y^2) \\ \dfrac{dy}{dt} = y(3 - x^2 - 3y^2) \end{cases}$$

Kritiska punkter: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(1 - x^2 - 3y^2) = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} = y(3 - x^2 - 3y^2) = 0 \end{cases}$

$$(0,0),\ (0,\pm 1),\ (\pm 1, 0)$$

$$(0,0)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x(-x^2 - 3y^2) \\ y(-x^2 - 3y^2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det(\mathbf{A_1} - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{0} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Instabil nod.

$(0,1)$

Sätt: $\begin{cases} u = x - 0 \\ v = y - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u' = x' \\ v' = y' \end{cases}.$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(1-u^2-3(v+1)^2) \\ (v+1)(3-u^2-3(v+1)^2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u \\ -6v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u^3-6uv-3uv^2) \\ -u^2v-u^2-3v^3-3v^2-6v^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\rho^2) \\ O(\rho^2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad \det(\mathbf{A}_2 - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -6 \end{cases}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Stabil nod.

(0,-1)

Sätt: $\begin{cases} u = x - 0 \\ v = y + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u' = x' \\ v' = y' \end{cases}.$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(1-u^2-3(v-1)^2) \\ (v-1)(3-u^2-3(v-1)^2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u \\ -6v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\rho^2) \\ O(\rho^2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\rho^2) \\ O(\rho^2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad \det(\mathbf{A}_2 - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -6 \end{cases}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Stabil nod.

$$(1,0)$$

Sätt: $\begin{cases} u = x - 1 \\ v = y - 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u' = x' \\ v' = y' \end{cases}.$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+u)(1-(1+u)^2 - 3v^2) \\ v(3-(1+u)^2 - 3v^2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u \\ 2v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\rho^2) \\ O(\rho^2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\rho^2) \\ O(\rho^2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(\mathbf{A}_3 - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sadelpunkt

$(-1,0)$

Sätt: $\begin{cases} u = x+1 \\ v = y-0 \end{cases} \quad \begin{cases} u' = x' \\ v' = y' \end{cases}.$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1+u)(1-(-1+u)^2-3v^2) \\ v(3-(-1+u)^2-3v^2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u \\ 2v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\rho^2) \\ O(\rho^2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\rho^2) \\ O(\rho^2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(\mathbf{A}_3 - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sadelpunkt