10.3.30.

$$x'' + \varepsilon\left(\frac{1}{3}(x')^3 - x'\right) + x = 0$$

Sätt: $y = x'$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \varepsilon\left(-\frac{1}{3}y^3 + y\right) - x \end{pmatrix} = \mathbf{g}(\mathbf{X})$$

Kritiska punkter: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \varepsilon\left(-\frac{1}{3}y^3 + y\right) - x \end{pmatrix} = \mathbf{0}$

$(0,0)$

$$\mathbf{g}'(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon(-y^2+1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$0 = \lambda^2 - \varepsilon\lambda + 1 = \left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}$$

$$\lambda = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4}}{2}$$

$(0,0)$ är instabil spiralpunkt då $\begin{cases} \varepsilon > 0 \\ \varepsilon^2 - 4 < 0 \end{cases}$

$$0 < \varepsilon < 2$$

$\boxed{(0,0) \text{ är stabil då } \tau < 0\ ,\ \text{dvs } \varepsilon < 0.}$

$$\boxed{(0,0) \text{ är stabil spiralpunkt då } \begin{cases} \varepsilon < 0 \\ \varepsilon^2 - 4 < 0 \end{cases}}$$

$$\boxed{-2 < \varepsilon < 0}$$

$$\boxed{\text{För } \varepsilon = 0 \text{ erhålles : } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

$\boxed{\text{Egenvärdena är } \lambda = \pm i.\ (0,0) \text{ är center.}}$