KTH Matematik
SF1633, Differentialekvationer I.
Kontrollskrivning nr 1, onsdagen den 11 april 2012, kl 08.30-09.30.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $x^2y' + 3xy = \frac{\sin x}{x}$, $x > 0$

som uppfyller villkoret $y(\pi) = 0$.

…………………………………………………………………………….………

Lösningsförslag:
Den givna differentialekvationen är linjär av första ordningen.
Den omformas till normalform och därefter bestämmes en integrerande faktor.

Först på normalform. $y' + \frac{3}{x}y = \frac{\sin x}{x^3}$.

En integrerande faktor är $e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$.
Multiplicera ekvationen på normalform med integrerande faktor.
Då erhålles $x^3y' + 3x^2y = \sin x$. (Man kan direkt omforma den givna differentialekvationen.)
Vänstra ledet är en derivata. $(x^3y)' = \sin x$. Integrera map x : $x^3y = -\cos x + C$.

Villkoret ger $0 = -\cos\pi + C$, $C = -1$. Insättning ger: $x^3y = -\cos x - 1$, $y = \frac{-1-\cos x}{x^3}$.

SVAR: Den lösning som uppfyller differentialekvationen och villkoret är $y = \frac{-1-\cos x}{x^3}$.

2 En tavla som är till salu påstås vara 250 år gammal. Pigment i målningen innehåller vitt bly med halveringstiden 22 år. Noggranna mätningar ger vid handen att 31/32 av den ursprungliga mängden vitt bly har sönderfallit. Antag att sönderfallshastigheten är proportionell mot mängden vitt bly.
Är en tavelskojare i farten? Avgör tavlans ålder.

…………………………………………………………………………….……………

Lösningsförslag:
Låt $N(t)$ vara mängden vitt bly i målningen vid en godtycklig tidpunkt t.

Sönderfallshastigheten är proportionell mot mängden vitt bly, dvs $\frac{dN}{dt} = kN$ där k är proportionalitetsfaktorn. Den allmänna lösningen är $N(t) = Ce^{kt}$. Sätt för $t = 0$ $N = N_0$.

Vi erhåller: $N(t) = N_0e^{kt}$. Halveringstiden är 22 år vilket insatt i lösningen ger $\frac{1}{2}N_0 = N_0e^{k22}$.

$k = \frac{1}{22}\ln\frac{1}{2} = -\frac{1}{22}\ln 2$, $N(t) = N_0e^{-\frac{t}{22}\ln 2} = N_0 2^{-\frac{t}{22}}$.

Vi bestämmer tiden t då $N = (1-\frac{31}{32})N_0 = \frac{1}{32}N_0$: $\frac{1}{32}N_0 = N_0 2^{-\frac{t}{22}}$, $2^{-5} = 2^{-\frac{t}{22}}$, $t = 110$ år.

SVAR: Det är en tavelskojare i farten, ty tavlans ålder är 110 år, ej 250 år.

3. Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen $y' = y(y-1)$.
Dock behöver ej konstantlösningarna anges.
Bestäm därefter den lösning som uppfyller villkoret

a) $y(0) = 2$ b) $y(0) = \frac{1}{2}$

Ange lösningens existensintervall och vad som händer då x växer.

…………………………………………………………………………….……………

Lösningsförslag

Vi omformar differentialekvationen: $\dfrac{1}{y(y-1)}y' = 1$.

Partialbråksuppdelning ger: $\left\{ -\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y-1} \right\} y' = 1$.

Integrera med avseende på x.

$$-\ln|y| + \ln|y-1| = x + \ln|C_1|$$

Lös ut y : $\dfrac{y-1}{y} = \pm C_1 e^x = Ce^x$, $1 - \dfrac{1}{y} = Ce^x$, $\dfrac{1}{y} = 1 - Ce^x$, $y = \dfrac{1}{1-Ce^x}$.

a) $y(0) = 2$ ger: $C = \dfrac{1}{2}$ vilket ger $y = \dfrac{2}{2-e^x}$ och existensintervallet $\{x : x < \ln 2\}$.

Då x växer från noll kommer y att växa obegränsat då x går mot $\ln 2$.

b) $y(0) = \dfrac{1}{2}$ ger: $C = -1$ vilket ger $y = \dfrac{1}{1+e^x}$ och existensintervallet $\{x : x \quad R\}$.

Då x växer från noll kommer y att gå mot noll då x växer obegränsat.

SVAR: Den allmänna lösningen är $y = \dfrac{1}{1-Ce^x}$.

a) $y = \dfrac{2}{2-e^x}$, existensintervallet $\{x : x < \ln 2\}$ och y växer obegränsat.

b) $y = \dfrac{1}{1+e^x}$, existensintervallet $\{x : x \quad R\}$ och y går mot noll.