Institutionen för Matematik, KTH

FX-tentamen, Differentialekvationer II

5/6 2012, 16.00-17.00

Beta Mathematical Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1.*(4 poäng) Bestäm lösningen $u(x,t)$ till värmeledningsekvationen*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\ , \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ &u(x,0) = e^{-x^2}\ , \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned} \tag{1}$$

Låt $U(\omega,t) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}dx$ vara Fouriertransformen i x-led. Då ger Fouriertransformering i x-led av (1)

$$\frac{\partial U(\omega,t)}{\partial t} = -\omega^2 U(\omega,t), \quad t > 0$$

för varje $\omega \in \mathbb{R}$. Denna ordinära differentialekvation har lösningen

$$U(\omega,t) = U(\omega,0)e^{-\omega^2 t}.$$

Begynnelsevillkoret $e^{-x^2} = u(x,0)$ ger (se BETA) $U(\omega,0) = \sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}$ och

$$U(\omega,t) = \sqrt{\pi}e^{-\omega^2(t+1/4)}$$

vars inverstransform är (se BETA)

$$u(x,t) = \frac{e^{-x^2/(4t+1)}}{\sqrt{4t+1}}.$$