Institutionen för Matematik, KTH

Lösningar till Kontrollskrivning 1, Differentialekvationer II den 6/2 2012, 13.15-14.15

Beta Mathematical Handbook är tillåtet hjälpmedel.

(a) Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar; förklara symboler som införs; formulera given information i början låt sedan varje följande steg i ditt resonemang bygga på vad du skrivit tidigare; avsluta med en slutsats i en fullständig mening. Kursbokens presentation är en förebild, men inte lärarens förkortade skrivsätt på tavlan.

(b) Varning: Svar utan noggrann förklaring ger inga poäng.

Skrivningen har tre uppgifter. Lämna in lösningar till **högst två** *av dessa. Fem poäng räcker för godkänd kontrollskrivning.*

1a.(3 poäng) *Bestäm alla lösningar till differentialekvationen*

$$y'(x) = x^2y^2. \tag{1}$$

1b.*(1 poäng) Bestäm lösningen till* (1) *som uppfyller* $y(0) = 1$*. På vilket område är lösningen definierad?*

Ekvationen kan med separering av variabler skrivas som

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x^2 dx$$

vilket medför att

$$\frac{-1}{y(x)} = \frac{x^3}{3} + C$$

för en godtycklig reell konstant C. Den allmänna lösningen är då $y(x) = -1/(C + x^3/3)$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger $C = -1$ och lösningen $y(x) = 1/(1 - x^3/3)$ för $x < 3^{1/3}$ (ty nämnaren har ett nollställe i $x = 3^{1/3}$).

2.(4 poäng) *Bestäm lösningen till*

$$y''(x) + y'(x) + \frac{5}{4}y(x) = 2 \tag{2}$$

som uppfyller $y(0) = 1$ *och* $y'(0) = 0$.

Vi bestämmer först lösningen till det homogena problemet. Den karakteristiska ekvationen $m^2 + m + 5/4 = 0$ ger med kvadratkomplettering $(m + 1/2)^2 + 5/4 = 1/4$, så $m = -1/2 \pm i$ är de två rötterna och vi får den allmänna lösningen till det homogena problemet

$$y_h = C_1 e^{-x/2+ix} + C_2 e^{-x/2-ix} = e^{-x/2}(A\cos x + B\sin x),$$

för godtyckliga reella konstanter A och B.

Vi gör sedan ansatsen $y_p = C =$ konstant för att bestämma en partikulär lösning. Vi har $y_p' = y_p'' = 0$ och ekvationen (2) ger $\frac{5}{4}C = 2$, d.v.s. $C = 8/5$.

Den allmänna lösningen blir då $y = y_h + y_p = e^{-x/2}(A\cos x + B\sin x) + 8/5$ och dess derivata är $y' = e^{-x/2}(-A\sin x + B\cos x) - \frac{1}{2}e^{-x/2}(A\cos x + B\sin x)$.

Begynnelsevillkoret ger

$$\begin{aligned} 1 = y(0) = A + 8/5 &\implies A = -3/5, \\ 0 = y'(0) = B - A/2 &\implies B = A/2 = -3/10 \end{aligned}$$

och lösningen $y(x) = e^{-x/2}(-\frac{3}{5}\cos x - \frac{3}{10}\sin x) + \frac{8}{5}$.

3.(4 poäng) *Anta att mängden $y(t)$ av ett radioaktivt ämne vid tiden t bestäms av ekvationen*

$$y'(t) = -ky(t),\ t > 0\ ,$$

där k är en positiv konstant. Härled ett uttryck för halveringstiden, d.v.s. den tid det tar att minska mängden av det radioaktiva ämnet till hälften.

Ekvationen har en integrerande faktor e^{kt} som ger

$$0 = \big(y'(t) + ky(t)\big)e^{kt} = \frac{d}{dt}\big(y(t)e^{kt}\big)$$

och integrering ger $y(t)e^{kt} = K$ för en godtycklig (positiv) reell konstant K, d.v.s

$$y(t) = Ke^{-kt}. \tag{3}$$

Vi söker nu halveringstiden T som ska uppfylla att $y(t+T) = y(t)/2$ för all $t > 0$ och får med hjälp av (3) ekvationen

$$Ke^{-k(t+T)} = 2^{-1}Ke^{-kt},$$

som förenklas till

$$e^{-kT} = \frac{1}{2}$$

vilket har lösningen $T = k^{-1}\ln 2$.