Institutionen för Matematik, KTH

Beta Mathematical Handbook är tillåtet hjälpmedel.

(a) Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar; förklara symboler som införs; formulera given information i början låt sedan varje följande steg i ditt resonemang bygga på vad du skrivit tidigare; avsluta med en slutsats i en fullständig mening. Kursbokens presentation är en förebild, men inte lärarens förkortade skrivsätt på tavlan.

(b) Varning: Svar utan noggrann förklaring ger inga poäng.

Skrivningen har tre uppgifter. Lämna in lösningar till **högst två** *av dessa (om tre lämnas rättas de två sämsta). Fem poäng räcker för godkänd kontrollskrivning.*

1.(4 poäng) *Skriv differentialekvationen*

$$x''(t) + x'(t) + \frac{5}{4}x(t)\big(1 - x(t)\big) = 0$$

som ett system och bestäm dess jämviktspunkter. Avgör också jämviktspunkternas karaktär.

Låt $x' = y$. Då har vi

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x'' = -x' - \frac{5}{4}x(1-x) = -y - \frac{5}{4}x(1-x)\,. \end{aligned}$$

Jämviktspunkterna uppfyller $(x', y') = (0, 0)$, vilket gäller om och endast om

$$\begin{aligned} 0 &= y =: g_1(x, y) \quad \text{och} \\ 0 &= -y - \frac{5}{4}x(1-x) =: g_2(x, y)\,, \end{aligned}$$

vilket har lösningen $y = 0$ & $x(1-x) = 0$ och ger de två jämviktspunkterna $(x, y) = (0, 0)$ och $(x, y) = (1, 0)$. För att bestämma deras karaktär studerar vi Jakobianen

$$g'(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{5}{4}(1-2x) & -1 \end{bmatrix}$$

i dessa punkter. I punkten $(x, y) = (0, 0)$ har vi då Jakobianen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{5}{4} & -1 \end{bmatrix}$$

vars egenvärden λ löser

$$0 = -\lambda(-1-\lambda) + \frac{5}{4} = \lambda^2 + \lambda + \frac{5}{4} = (\lambda + \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = (\lambda + \frac{1}{2})^2 + 1$$

som ger $\lambda = -\frac{1}{2} \pm i$. Vi ser att båda egenvärden har negativ realdel och är komplexvärda. Eftersom realdelen av egenvärdena är strikt negativa och imaginärdelen är skild från noll har det linjariserade systemets jämvikstpunkter samma karaktär lokalt som vårt ursprungliga ickelinjära problem. Jämviktspunkten $(0,0)$ är därför en asymptotiskt stabil spiral.

I punkten $(x,y) = (1,0)$ har vi Jakobianen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{5}{4} & -1 \end{bmatrix}$$

vars egenvärden λ löser

$$0 = -\lambda(-1-\lambda) - \frac{5}{4} = \lambda^2 + \lambda - \frac{5}{4} = (\lambda + \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = (\lambda + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2}$$

som ger $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$. Vi ser att båda egenvärden är reella och de har olika tecken. Jämviktspunkten $(1,0)$ är därför en instabil sadelpunkt.

2.(4 poäng) *Temperaturen $u(x,t)$ i en stav med längden 1, vars ändar har temperaturen noll, löser värmeledningsekvationen*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \ , \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0 \ , \quad t > 0, \end{aligned} \tag{1}$$

med begynnelsetemperaturen $u(x,0) = \frac{1}{2}\sin(2\pi x)$. Bestäm temperaturen vid tiden $t = 1$ i punkten $x = 1/4$.

Variabelseparation $u(x,t) = X(x)T(t)$ insatt i (1) ger $T'(t)X(x) = T(t)X''(x)$ och

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{konstant} = \lambda \ .$$

Den sista ekvationen och dess randvillkor $X(0) = X(1) = 0$ har de nollskilda lösningarna $X(x) = \sin(n\pi x)$ för $\lambda = -n^2\pi^2$ och $n = 1, 2, 3, \ldots$.. Detta ger $T'(t) = -n^2\pi^2 T(t)$, som har lösningen $T(t) = a_n e^{-n^2\pi^2 t}$ och $T(t)X(x) = a_n e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x)$. Eftersom (1) är linjär får vi

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x) \ .$$

Fourierkoefficienterna a_n bestäms från begynnelsevillkoret $u(x,0) = \frac{1}{2}\sin(2\pi x)$ till

$$a_n = 2\int_0^1 \frac{1}{2}\sin(2\pi x)\sin(n\pi x)dx = \begin{cases} 0 & n \neq 2 \\ \frac{1}{2} & n = 2. \end{cases}$$

som ger $u(\frac{1}{4}, 1) = \frac{1}{2}e^{-4\pi^2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}e^{-4\pi^2}$.

3.(4 poäng) *Formulera och bevisa en sats om den allmänna lösningens uppdelning i homogen och partikulär lösning till en linjär differentialekvation.*

Se t.ex. boken Sats 4.1.6, sidan 126, eller Persson & Böijers, Analys i en variabel, Sats 1 Kapitel 8.5, sidorna 386-387.