Institutionen för Matematik, KTH

# Lösningar till Kontrollskrivning 3, Differentialekvationer II
# 24/4 2012, 8.15-10.00

*Beta Mathematical Handbook är tillåtet hjälpmedel.*

*(a) Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar; förklara symboler som införs; formulera given information i början låt sedan varje följande steg i ditt resonemang bygga på vad du skrivit tidigare; avsluta med en slutsats i en fullständig mening. Kursbokens presentation är en förebild, men inte lärarens förkortade skrivsätt på tavlan.*

*(b) Varning: Svar utan noggrann förklaring ger inga poäng.*

*Skrivningen har tre uppgifter. Lämna in lösningar till* **högst två** *av dessa (om tre lämnas rättas de två sämsta). Fem poäng räcker för godkänd kontrollskrivning.*

**1.**(4 poäng) *Bestäm* $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ *där* $u(x,t)$ *löser vågekvationen*

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\ , \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,\\
&u(x,0) = 0\ , \quad -\infty < x < \infty, \qquad (1)\\
&\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = e^{-|x|}\ , \quad -\infty < x < \infty.
\end{aligned}
$$

Låt $U(\omega,t) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}dx$ vara Fouriertransformen i $x$-led. Då ger Fouriertransformering i $x$-led av (1)

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 U(\omega,t), \quad t > 0$$

för varje $\omega \in \mathbb{R}$. Denna ordinära differentialekvation kan lösas med karakteristiska ekvationen $m^2 + \omega^2 = 0$ som ger de imaginära rötterna $m = \pm i\omega$ och lösningen

$$U(\omega,t) = A(\omega)\cos(\omega t) + B(\omega)\sin(\omega t).$$

Begynnelsevillkoret $0 = u(x,0)$ ger $A(\omega) = 0$ och

$$\frac{\partial U(\omega,t)}{\partial t} = \omega B(\omega)\cos(\omega t).$$

Begynnelsevillkoret $\partial u(x,0)/\partial t = e^{-|x|}$ ger (se BETA)

$$\frac{\partial U(\omega,0)}{\partial t} = \mathcal{F}e^{-|x|} = 2/(1+\omega^2).$$

och vi får

$$\frac{\partial U(\omega,t)}{\partial t} = \frac{2}{1+\omega^2}\cos(\omega t) = \frac{2}{1+\omega^2}\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}$$

vars inverstransform är (se BETA)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{e^{-|x+t|} + e^{-|x-t|}}{2}.$$

**2.**(4 poäng) *Bestäm lösningen* $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *till integralekvationen*

$$y(t) + \int_0^t e^{-\tau} y(t-\tau) d\tau = 1, \quad t > 0\,. \tag{2}$$

Ekvationen kan lösas med Laplacetransformen $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt$. Vi har Laplacetransformerna (se BETA)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{1\} &= \frac{1}{s}, \\ \mathcal{L}\{e^{-t}\} &= \frac{1}{s+1}, \\ \mathcal{L}\{\int_0^t e^{-\tau} y(t-\tau) d\tau\} &= \frac{1}{s+1} Y(s) \end{aligned}$$

som efter Laplacetransformering av (2) ger ekvationen

$$Y(s) + \frac{1}{s+1} Y(s) = \frac{1}{s}\,,$$

vars lösning är

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}.$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{s+1}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} = \frac{A(s+2) + Bs}{s(s+2)}$$

och ekvationerna

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ 2A &= 1 \end{aligned}$$

som har lösningen $A = B = 1/2$. Inverstransformen av $Y(s) = \frac{1}{2}(\frac{1}{s} + \frac{1}{s+2})$ ger (se BETA) lösningen $y(t) = (1 + e^{-2t})/2$.

**3.**(4 poäng) *Visa att lösningen till differentialekvation* $X'(t) = f(X(t))$ *med givet begynnelsevärde* $X(0) = X_0$ *är entydig om* $f$ *är Lipschitzkontinuerlig.*

Se Kapitel 3 i sidorna ”Eulers metod”.