Laboration 1: Konstruera en optimal balk med numerik

Avsikten med denna laboration är att:

- lösa ett optimeringsproblem med en differentialkekvation som bivillkor,
- repetera och hantera metoden med Lagrangefunktioner för att lösa optimeringsproblem med bivillkor
- se ett exempel på att en differentialekvation kan användas på annat sätt än att bara bestämma lösningen för givna koefficienter - att konstruera en optimal balk är ett sådant exempel på ett inverst problem.

Denna laboration innehåller programmering i Matlab och numerisk optimering, med en metod som kan generaliseras till många problem, t.ex. används den för att söka optimal form av en vinge eller ett skrov.

1. Betrakta utböjningen $u(x)$ av en fritt upplagd balk som löser Bernoulli-Eulers ekvation

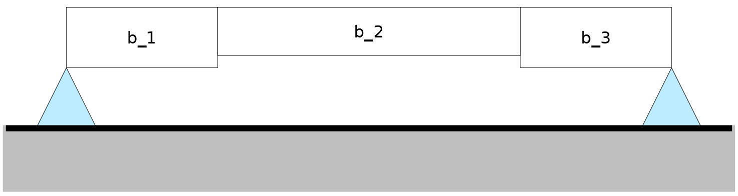
$$\begin{aligned} \big(b(x)u''(x)\big)'' = f(x), \quad x \in (0,1) \\ u(1) = b(1)u''(1) = u(0) = b(0)u''(0) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

med böjstyvheten $b(x)$ och kraften $f(x)$ per längdenhet. Denna ekvation kan skrivas som ett system

$$\begin{aligned} w''(x) = f(x) \quad x \in (0,1), w(0) = w(1) = 0 \\ b(x)u''(x) = w(x) \quad x \in (0,1), u(0) = u(1) = 0. \end{aligned}$$

Anta att böjstyvheten b är styckvis konstant

$$b(x) = \begin{cases} b_1 & x < 1/3 \\ b_2 & 1/3 \leq x < 2/3 \\ b_3 & x \geq 2/3. \end{cases}$$



Fritt upplagd balk med styckvis varierande bredd.

Målet är att välj parametrarna $b_1 > 0$ och $b_2 > 0$ med $b_3 = 2 - b_2 - b_1 > 0$ så att energin $\int_0^1 f(x)u(x)dx$ minimeras. Vi kan tolka bivillkoret $b_1 + b_2 + b_3 = 2$ som att vi har en given mängd material att göra vår balk av, med varierande bredd och konstant höjd.

1a. Låt V_n vara en approximation av $v(x_n)$ för $x_n = hn$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$, $h = 1/N$, och approximera andraderivatan med den vanliga andradifferensen $D^2V_n := (V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1})/h^2$ för $n = 1, \ldots N-1$. En approximation av differentialekvationen är differensekvationen

$$D^2(BD^2U)_n = F_n, \quad n = 1, \ldots, N-1, \quad D^2U_0 = D^2U_N = 0,\ U_0 = U_N = 0 \tag{2}$$

som kan skrivas

$$\begin{aligned} D^2W_n &= F_n \quad n = 1, \ldots, N-1, \quad W_0 = W_N = 0 \\ B_nD^2U_n &= W_n \quad n = 1, \ldots, N-1, \quad U_0 = U_N = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

med

$$B_n = \begin{cases} b_1 & x_n < 1/3 \\ b_2 & 1/3 \le x_n < 2/3 \\ b_3 & x_n \ge 2/3 \end{cases}$$

och vi kan tolka D^2V_n som en matris vektor multiplikation, med den tridiagonala matrisen som har $-2/h^2$ i huvuddiagonalen och $1/h^2$ i övre och undre diagonalen,

$$D^2 = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Vi ska nu minimera energin $\sum_{n=1}^{N-1} F_nU_n =: F \cdot U$ under bivillkoret att ekvationen (2) är uppfylld. Det är användbart att studera Lagrangefunktionen $L(U, \Lambda, b) := F \cdot U + (F - D^2BD^2U) \cdot \Lambda$. Här är B diagonalmatrisen med B_n i diagonalen,

$$B = \mathrm{diag}(B_n) = \begin{bmatrix} b_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & b_2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 2 - b_2 - b_1 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Förklara varför Lagrangefunktionen satisfierar $L(U, \Lambda, b) = F \cdot (U + \Lambda) - BD^2U \cdot D^2\Lambda$ och ger ekvationerna

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{\Lambda_n} L(U, \Lambda, B) = D^2(BD^2U)_n - F_n, \quad n = 1, \ldots, N-1, \quad D^2U_0 = D^2U_N = 0, U_0 = U_N = 0 \\ 0 &= \partial_{U_n} L(U, \Lambda, B) = D^2(BD^2\Lambda)_n - F_n, \quad n = 1, \ldots, N-1, \quad D^2\Lambda_0 = D^2\Lambda_N = 0, \Lambda_0 = \Lambda_N = 0 \\ 0 &= \partial_{b_i} L(U, \Lambda, B), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

1b. Vi ser att i detta fall är $\Lambda = U$ och för en given böjstyvhet B kan differensekvationen (3) lösas.

Bestäm b_i numeriskt genom att implementera följande iteration i till exempel Matlab:

$$b_i^{m+1} = b_i^m - \delta \partial_{b_i} L(U^m, \Lambda^m, B^m) \quad i = 1, 2,$$

där $\delta > 0$ väljs lämpligt litet och $U^m = \Lambda^m$ är lösningen till (3) med $B = B^m$ och b_3 är eliminerad enligt (4). Välj t.ex. en jämt fördelad last $f(x) = 1$. Notera att L ska deriveras med avseende på diagonalelementen i (4).

1c. Testa numeriskt noggrannheten av approximationen (2) till (1) genom att fabricera en exakt lösning till (1) (hur?). Motivera noggrannheten de ser.