Institutionen för Matematik, KTH

Tentamen Differentialekvationer II SF1634 och 5B1207
8/5 2012, 13.00-18

Beta Mathematical Handbook är tillåtet hjälpmedel.

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Skrivningen omfattar tre delar. Del I består av 5 uppgifter, som vardera kan ge högst 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning nr j ger automatiskt 3 poäng på uppgift nummer j $(j = 1, 2, 3)$ och godkänd laboration nummer n ger 3 poäng på uppgift $n + 3$ $(n = 1, 2)$.

Del II består av 3 uppgifter, som vardera kan ge högst 4 poäng; det finns två alternativa uppgifter 8. Del III består av 2 uppgifter, som vardera kan ge högst 5 poäng.

Betygsgränser: E 15, D 18, C 22, B 26 och A 31 poäng. Minst 13 poäng, men ej godkänt, ger resultat FX, som innebär rätt till komplettering.

De som varit registrerade 2007 eller tidigare (med kursnummer 5B1207) får betyg 5, 4, 3, K eller U. Kraven för de fyra första är som för A, C, E respektive FX ovan.

1.(3 poäng) *Bestäm alla lösningar till differentialekvationen*

$$y'(x) = 2xy(x)$$

och den lösningen som uppfyller $y(0) = 1$.

Differentialekvationen ger oss (för $y \neq 0$)

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int x dx$$

som har lösningen $\ln y(x) - \ln y(0) = x^2$, så lösningarna är $y(x) = y(0)e^{x^2} = Ce^{x^2}$, där $C \in \mathbb{R}$ är en godtycklig konstant som bestämmer $y(0)$ och den unika lösningen som uppfyller $y(0) = 1$ är $y(x) = e^{x^2}$.

2.(3 poäng) *Rörelsen i en dämpad ickelinjär fjäder, som har längden $x(t)$ vid tiden t, beskrivs av differentialekvationen*

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) + \sin\big(x(t)\big) = 0\,.$$

Skriv ekvationen som ett system och bestäm modellens jämviktspunkter och jämviktspunkternas karaktär.

Vi får systemet

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -2y - x - \sin x\,. \end{aligned}$$

Högerleden är noll om $y = 0$ och $x + \sin x = 0$. Den enda lösningen till $f(x) := x + \sin x = 0$ är x=0, ty $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$ så f är växande och strängt växande i en omgivning till $x = 0$. Vi har alltså en jämviktspunkt $(x, y) = (0, 0)$. Jacobianen av högerledet

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - \cos x & -2 \end{bmatrix}$$

i punkten $(0, 0)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

har den karakteristiska ekvationen

$$0 = -\lambda(-2 - \lambda) + 2 = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = (\lambda + 1)^2 + 1$$

som ger lösningarna $\lambda = -1 \pm i$. Jämviktspunkten $(x, y) = (0, 0)$ är asymptotisk stabil eftersom Jacobianens båda egenvärden har negativ realdel.

3.(3 poäng) *Antag att koncentrationen $u(x, t)$ av ett ämne uppfyller ekvationen*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad -\infty < x < \infty, \ t > 0, \\ u(x, 0) &= \delta(x), \end{aligned}$$

där δ är δ-"funktionen" som uppfyller $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$ och $\delta(x) = 0$ för $x \neq 0$. Bestäm koncentrationen $u(x, t)$.

Låt $U(\omega, t) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{-i\omega x}dx$ vara Fouriertransformen i x-led. Fouriertransformering av ekvationen ger

$$\frac{\partial U(\omega, t)}{\partial t} = -\omega^2 U(\omega, t) + i\omega U(\omega, t)$$

vars lösning är

$$U(\omega, t) = U(\omega, 0)e^{-(\omega^2 - i\omega)t}$$

och inverstransformering, med hjälp av $U(\omega, 0) = \mathcal{F}\{\delta\}(\omega) = 1$, $\mathcal{F}\{e^{-x^2/(4t)}/\sqrt{4\pi t}\}(\omega) = e^{-\omega^2 t}$ och translation, ger

$$u(x, t) = \frac{e^{-(x+t)^2/(4t)}}{\sqrt{4\pi t}}.$$

4.(3 poäng) *Antag att en populations tillväxthastighet är noll om populationens storlek, y, är noll och om den är 100. Antag också att tillväxthastigheten är ett andragradspolynom i y, som är positiv för $0 < y < 100$. Ställ upp en model för populationen som funktion av tiden. Hur stor är populationen när tillväxthastigheten är maximal? Bestäm också modellens jämviktspunkter och avgör dess stabilitet.*

Positiva andragradspolynom som har nollställe i noll och 100 är $ay(100-y)$, för en godtycklig positiv konstant a. Vi får modellen

$$y'(t) = ay(100-y).$$

Högerledet $f(y) = ay(100-y)$ har derivatan $f'(y) = a(100-2y)$ som är noll bara när $y = 50$, vilket är en inre maximipunkt eftersom andraderivatan är negativ. Den maximal tillväxthastigheten fås därför när $y = 50$.

Modellens jämviktspunkter y_* bestäms av $f(y_*) = 0$, som har lösningen $y_* = 0$ och $y_* = 100$. Vi ser också att $f'(0) = 100a > 0$, så 0 är en instabil jämviktspunkt, och $f'(100) = -100a < 0$, så 100 är en asymptotisk stabil jämviktspunkt.

5.(3 poäng) *Lös differentialekvationen*

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = (x-1)e^x$$

med begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = 0$.

Laplacetransformering ger

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - 2sY(s) + Y(s) &= \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{s-1} \\ Y(s)(s-1)^2 &= \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

och vi får

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^4} - \frac{1}{(s-1)^3}$$

vars inverstransform är (se BETA L22)

$$y(x) = \frac{1}{3!}x^3e^x - \frac{1}{2!}x^2e^x = e^x(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}).$$

Alternativ med homogen och partikulär lösning:
Homogen lösning y_h :
Den karakteristiska ekvationen $m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 = 0$ ger dubbelroten $m = 1$ och den homogena lösningen $y_h = (Ax+B)e^x$, för godtyckliga konstanter A och B.

Partikulärlösning y_p:
Eftersom det homogena problemet har lösningen $(Ax+B)e^x$ och gör vi ansatsen

$$y_p = x^2(ax+b)e^x =: u(x)e^x .$$

Insättning ger

$$y_p' = (u'+u)e^x, \quad y_p'' = (u''+2u'+u)e^x$$

och

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = \big(u'' + 2u' + u - 2(u'+u) + u\big)e^x = u''e^x = (6ax+2b)e^x .$$

Vi får ekvationen $(6ax + 2b)e^x = (x - 1)e^x$ som har lösningen $6a = 1$ och $2b = -1$, dvs $a = 1/6$ och $b = -1/2$ och

$$y_p = (\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2})e^x$$

så

$$y = y_h + y_p = (Ax + B)e^x + (\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2})e^x \,.$$

Begynnelsevillkoret ger $y(0) = B = 0$ och $y'(0) = A + B = 0$, dvs $A = B = 0$. Vi har lösningen $y(x) = (\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2})e^x$.

6.(4 poäng) *Lös randvärdesproblemet*

$$EI\,\frac{d^4y(x)}{dx^4} = w_0 x, \quad 0 < x < L,$$
$$y(0) = y(L) = 0,$$
$$y''(0) = y''(L) = 0,$$

där $y(x)$ *är utböjningen av en fritt upplagd balk med lasten* $w_0 x$*. Parametern* w_0 *och böjstyvhet* EI *är positiva konstanter.*

Problemet kan lösas genom att successivt integrera och använda randvillkoren. Låt $C := w_0/(EI)$. Vi får

$$\frac{d^4y}{dx^4} = Cx$$

och efter integration

$$\frac{d^3y}{dx^3} = C\frac{x^2}{2} + a$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = C\frac{x^3}{6} + ax + b$$

för konstanter a och b. Randvillkoret $y''(0) = 0$ ger $b = 0$ och $y''(L) = 0$ ger

$$C\frac{L^3}{6} + aL = 0$$

vars lösning är $a = -CL^2/6$. Ytterliggare integration ger

$$\frac{dy}{dx} = C\frac{x^4}{24} - CL^2\frac{x^2}{12} + c$$
$$y(x) = C\frac{x^5}{120} - CL^2\frac{x^3}{36} + cx + d$$

och randvillkoret $y(0) = y(L) = 0$ medför att $d = 0$ och

$$c = CL^4(\frac{1}{36} - \frac{1}{120}) = \frac{7CL^4}{360}$$

så

$$y(x) = \frac{w_0}{EI}\left(\frac{x^5}{120} - \frac{x^3L^2}{36} + \frac{7xL^4}{360}\right).$$

7.(4 poäng) *Antag att spänningen $\sigma(t)$ och töjningen $\epsilon(t)$ i ett viskoelastiskt material uppfyller ekvationen*

$$\sigma(t) = E\epsilon(t) + \int_0^t f(t-\tau)\frac{d\epsilon(\tau)}{d\tau}d\tau$$

och att mätningar har gett att $\sigma(t) = t + (1-e^{-2t})/2$, $\epsilon(t) = t$ och $E = 1$. Bestäm relaxationsfunktionen $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$.

Laplacetransformering ger

$$\mathcal{L}\{\epsilon\}(s) = \mathcal{L}\{t\}(s) = 1/s^2$$
$$\mathcal{L}\{d\epsilon(t)/dt\}(s) = \mathcal{L}\{1\}(s) = 1/s\,.$$

Laplacetransformering av högerledet i ekvationen ger

$$E\mathcal{L}\{\epsilon\}(s) + \frac{\mathcal{L}\{f\}(s)}{s} = \frac{1}{s^2} + \frac{\mathcal{L}\{f\}(s)}{s}\,.$$

Laplacetransformering av vänsterledet blir

$$\mathcal{L}\{\sigma\}(s) = \mathcal{L}\{t + (1-e^{-2t})/2\}(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)$$

vilket ger

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{s}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right) = \frac{s}{2}\frac{s+2-s}{s(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$

vars inverstransform är $f(t) = e^{-2t}$.

8.(4 poäng) *Låt $\mathbf{v} = (v_1, v_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara ett givet hastighetsfält i planet. Den partiella differentialekvationen*

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\big(u(x_1,x_2)v_1(x_1,x_2)\big) + \frac{\partial}{\partial x_2}\big(u(x_1,x_2)v_2(x_1,x_2)\big) = 0 \tag{1}$$

beskriver koncentrationen $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ av partiklar som rör sig med hastigheten $\mathbf{v}$. Anta att $\frac{\partial}{\partial x_1}v_1(x_1,x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}v_2(x_1,x_2) = 0$. Visa först att (1) då medför att

$$v_1(x_1,x_2)\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1} + v_2(x_1,x_2)\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0\,.$$

Låt $\big(X_1(t), X_2(t)\big)$ vara banor som partiklarna med hastigheten (v_1,v_2) följer, det vill säga

$$\frac{d}{dt}X_i(t) = v_i\big(X_1(t),X_2(t)\big), \quad i = 1,2. \tag{2}$$

Visa också att

$$\frac{d}{dt}u\big(X_1(t),X_2(t)\big)=0. \tag{3}$$

Detta betyder att den partiella differentialekvationen (1) *kan lösas med hjälp av de ordinära differentialekvationerna* (2) *och* (3).

Derivering av en produkt ger

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial x_1}\big(u(x_1,x_2)v_1(x_1,x_2)\big)+\frac{\partial}{\partial x_2}\big(u(x_1,x_2)v_2(x_1,x_2)\big)\\
&= u(x_1,x_2)\underbrace{\big(\frac{\partial}{\partial x_1}v_1(x_1,x_2)+\frac{\partial}{\partial x_2}v_2(x_1,x_2)\big)}_{=0}+v_1(x_1,x_2)\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}+v_2(x_1,x_2)\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}\\
&= v_1(x_1,x_2)\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}+v_2(x_1,x_2)\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}\\
&= \mathbf{v}\cdot\nabla u(x_1,x_2)\,.
\end{aligned} \tag{4}$$

Låt $\mathbf{X}(t)=\big(X_1(t),X_2(t)\big)$. Kedjeregeln medför att

$$\frac{d}{dt}u\big(\mathbf{X}(t)\big)=\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt}\cdot\nabla u\big(\mathbf{X}(t)\big)$$

och definitionen $\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt}=\mathbf{v}\big(\mathbf{X}(t)\big)$ och ekvation (4) ger då

$$\frac{d}{dt}u\big(\mathbf{X}(t)\big)=\mathbf{v}\big(\mathbf{X}(t)\big)\cdot\nabla u\big(\mathbf{X}(t)\big)=0\,.$$

Alternativ uppgift 8.(4 poäng) *Visa att lösningen till differentialekvation* $X'(t)=f(X(t))$ *med givet begynnelsevärde* $X(0)=X_0$ *är entydig om* f *är Lipschitzkontinuerlig. Formulera Grönwalls lemma om det används.*

Se Kapitel 3 i sidorna "Eulers metod".

9. *Temperaturen* $u(x,t)$ *i en stav med längden* 1 *vid tiden* t *och positionen* x*, beskrivs av differentialekvationen*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-u(x,t),\quad 0<x<1,\ t>0, \tag{5}$$

och båda ändar hålls vid temperaturen noll. Anta att stavens begynnelsetemperatur är 1.

9a. *(3 poäng) Bestäm* $u(x,t)$*. Svaret får innehålla en oändlig summa.*

9b. *(2 poäng) Anta att vi har låtit staven svalna länge, mer än en tidsenhet. Ge en uppskattning av den ytterliggare tid det tar för den maximala temperaturen att halveras?*

Med hjälp av variabelseparationsmetoden och ansatsen $u(x,t) = X(x)T(t)$ får vi ekvationen

(6) $$T'(t)X(x) = T(t)X''(x) - T(t)X(x)$$

och efter division med TX

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} - 1\,.$$

Vi ser att vänsterledet är en funktion av bara t och högerledet är en funktion av x, vilket bara är möjligt om funktionen är konstant, så $\frac{X''(x)}{X(x)} =$ konstant vilket tillsammans med randvillkoren $X(0) = X(1) = 0$ ger de nollskilda lösningarna $X(x) = \sin(n\pi x)$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$. Insatt i (6) ger det

$$T'(t) = -(n^2\pi^2 + 1)T(t)$$

vars lösning är $T(t) = T(0)e^{-(n^2\pi^2+1)t}$. Eftersom (5) är linjär får vi

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n^2\pi^2+1)t} \sin(n\pi x)\ .$$

Fourierkoefficienterna a_n bestäms av begynnelsevillkoret

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x)$$

och ortogonaliteten, $\int_0^1 \sin(n\pi x)\sin(m\pi x)dx = 0$ för $n \neq m$, till

$$a_n = 2\int_0^1 u(x,0)\sin(n\pi x)dx = 2\int_0^1 \sin(n\pi x)dx = 2[\frac{\cos n\pi x}{-n\pi}]_0^1 = \frac{2\big(1-(-1)^n\big)}{n\pi}\,.$$

Temperaturen i staven blir $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\big(1-(-1)^n\big)}{n\pi} e^{-(n^2\pi^2+1)t}\sin(n\pi x)$.

Vi ser att jämna n inte bidrar i summan. Varje term avtar i tiden med faktorn $\frac{2\big(1-(-1)^n\big)}{n\pi}e^{-(n^2\pi^2+1)t}$. Den första avtar därför långsammast och tiden det tar att halvera första termen är $\ln 2/(\pi^2+1)$. De andra termerna har kortare halveringstid - nästa term halveras på tiden $\ln 2/(9\pi^2+1)$, dvs ungefär nio gånger så fort och blir snabbt försumbara jämfört med första termen: det relativa bidraget till temperaturen av alla utom första termen jämfört med första termen blir

$$\Big|\frac{\sum_{n=3}^{\infty} 2\big(1-(-1)^n\big)e^{-(n^2\pi^2+1)t}\sin(n\pi x)/(n\pi)}{\frac{4}{\pi}e^{-(\pi^2+1)t}\sin\pi/2}\Big| \leq Ce^{-7\pi^2 t} \leq Ce^{-63} \ll 1.$$

för en konstant C av storleksordning 1 och vi ser att temperarurbidraget från första termen dominerar starkt, så halveringstiden är ungefär $\ln 2/(\pi^2+1)$.

10a.(3 poäng) *Bestäm den allmänna lösningen* $\mathbf{X} : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ *till systemet*

$$\mathbf{X}'(t) + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

10b.(2 poäng) *Bestäm lösningen* $\mathbf{X} : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ *till systemet*

$$\mathbf{X}'(t) + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$$

som uppfyller

$$\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Problemet kan lösas med diagonalisering eller med Laplace transform.

Diagonalisering av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

görs med en matris P, där $P^{-1}AP$ är diagonal och kolonnerna i P är de två egenvektorerna till A. Egenvektorerna p_i löser $Ap_i = \lambda_i p_i$, $i = 1, 2$, vilket ger att $\det(A - \lambda_i I) = 0$, dvs

$$(2 - \lambda_i)(1 - \lambda_i) = 0$$

och $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = 1$. Egenvärdet 2 ger sedan att egenvektorn

$$p_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

uppfyller ekvationen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vilket ger lösningen $b = 0$. Vi kan då välja $a = 1$. På motsvarande sätt blir egenvektorn till egenvärdet 1

$$p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Matrisen är då

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

och dess invers är i detta fall

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Variabelbytet $\mathbf{X} = P\mathbf{w}$ ger

$$P\mathbf{w}' + AP\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$$

så

$$\mathbf{w}' + P^{-1}AP\mathbf{w} = P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix}$$

vilket kan skrivas

$$\begin{aligned} w_1' + 2w_1 &= t \\ w_2' + w_2 &= -t. \end{aligned}$$

Med hjälp av homogen och partikulär lösning finner vi

$$\begin{aligned} w_1(t) &= Ae^{-2t} + \frac{t - 1/2}{2} \\ w_2(t) &= Be^{-t} + 1 - t\,. \end{aligned}$$

Svar (10a): Lösningen till det homogena problemet för $\mathbf{w}$ är

$$\begin{bmatrix} w_{1h}(t) \\ w_{2h}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ae^{-2t} \\ Be^{-t} \end{bmatrix}$$

för godtyckliga konstanter A och B, vilket ger lösningen till det homogen problemet

$$\mathbf{X}(t) = P\mathbf{w}_h(t) = Ae^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + Be^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Svar (10b): Begynnelsevillkoret $\mathbf{X}(0) = (0, 0)$ ger $\mathbf{w}(0) = (0, 0)$ och

$$\begin{aligned} 0 &= A - 1/4 \\ 0 &= B + 1 \end{aligned}$$

dvs $A = 1/4$ och $B = -1$. Slutligen får vi

$$\mathbf{X}(t) = P\mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t}/4 - e^{-t} - t/2 + 3/4 \\ -e^{-t} - 1 + t \end{bmatrix}.$$

Metoden med Laplacetransform ger med $Y(s) := \int_0^\infty \mathbf{X}(t)e^{-st}dt$

$$sY(s) - \mathbf{X}(0) + AY(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/s^2 \end{bmatrix}$$

vars lösning är

$$\begin{aligned} Y(s) &= \begin{bmatrix} 2+s & 1 \\ 0 & 1+s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/s^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/(2+s) & -1/((1+s)(2+s)) \\ 0 & 1/(1+s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/s^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-1}{s^2(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{s^2(s+1)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

och dess inverstransform med hjälp av partialbråksuppdelning är

$$\begin{bmatrix} e^{-2t}/4 - e^{-t} - t/2 + 3/4 \\ -e^{-t} - 1 + t \end{bmatrix}.$$