

Institutionen för Matematik, KTH
Tentamen Differentialekvationer II SF1634 och 5B1207
14/8 2012, 14.00-19

Beta Mathematical Handbook är tillåtet hjälpmedel.

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Skrivningen omfattar tre delar. Del I består av 5 uppgifter, som vardera kan ge högst 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning nr j ger automatiskt 3 poäng på uppgift nummer j ($j = 1, 2, 3$) och godkänd laboration nummer n ger 3 poäng på uppgift $n + 3$ ($n = 1, 2$).

Del II består av 3 uppgifter, som vardera kan ge högst 4 poäng; det finns två alternativa uppgifter 10. Del III består av 2 uppgifter, som vardera kan ge högst 5 poäng.

Betygsgränser: E 15, D 18, C 22, B 26 och A 31 poäng. Minst 13 poäng, men ej godkänt, ger resultat FX, som innebär rätt till komplettering.

De som varit registrerade 2007 eller tidigare (med kursnummer 5B1207) får betyg 5, 4, 3, K eller U. Kraven för de fyra första är som för A, C, E respektive FX ovan.

1.(3 poäng) *Befolkningen i ett litet samhälle växer med en hastighet som är proportionell mot befolkningen. Den ursprungliga befolkningen är 500 personer. Efter 5 år är befolkningen 1000 personer. Ställ upp tillhörande begynnelsevärdesproblem. Hur stor är befolkningen efter 15 år?*

Låt $B(t)$ vara befolkningsmängden vid tiden t . Vi har

$$B'(t) = \alpha B(t), \quad B(0) = 500, \quad \text{och} \quad B(5) = 1000,$$

för en konstant α . Vi får lösningen $B(t) = B(0)e^{\alpha t}$, så $1000 = 500e^{5\alpha}$ vilket ger $5\alpha = \ln 2$.

Svar: $B'(t) = \frac{\ln 2}{5} B(t)$, vars lösning är $B(t) = 500e^{\alpha t} = 500e^{t \ln(2)/5}$ och $B(15) = 500e^{3 \ln 2} = 4000$.

2.(3 poäng) *Bestäm och klassificera jämviktspunkterna till systemet*

$$x'(t) = -3x(t) + y^2(t) + 2$$

$$y'(t) = x(t) - y^2(t).$$

En jämviktspunkt (x, y) uppfyller

$$-3x + y^2 + 2 = 0$$

$$x - y^2 = 0.$$

Andra ekvationen $x = y^2$ insatt i första ekvationen ger $0 = -3x + x + 2 = 2(1 - x)$ vars lösning är $x = 1$. Då blir $y^2 = 1$ och $y = \pm 1$. Jämviktspunkterna är $(1, 1)$ och $(1, -1)$.

Jacobimatrisen för systemet är

$$\begin{pmatrix} -3 & 2y \\ 1 & -2y \end{pmatrix}.$$

I punkten $(1, 1)$ får vi Jacobimatrisen

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

som har egenvärdesekvationen

$$0 = (-3 - \lambda)(-2 - \lambda) - 2 = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = (\lambda + 5/2)^2 + (16 - 25)/4$$

som ger $\lambda = -5/2 \pm 3/2$, d.v.s. $\lambda = -1$ och $\lambda = -4$. Båda egenvärden har realdelen mindre än 0, så $(1, 1)$ är en asymptotiskt stabil jämviktspunkt.

I punkten $(1, -1)$ är Jacobimatrisen

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

vars egenvärden λ uppfyller

$$0 = (-3 - \lambda)(2 - \lambda) + 2 = \lambda^2 + \lambda - 4 = (\lambda + 1/2)^2 - (16 + 1)/4$$

så $\lambda = -1/2 \pm \sqrt{17}/2$, d.v.s. egenvärdena har olika tecken och $(1, -1)$ är en instabil sadelpunkt.

3.(3 poäng) *En option är ett kontrakt som ger möjlighet att köpa en aktie för ett fixt pris $K > 0$ vid en fix tid T i framtiden. En modell för optionens pris $f(S, t)$ som funktion av aktiepriset S vid tiden t är Black-Scholes ekvation*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(S, t) + rS \frac{\partial f}{\partial S}(S, t) + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(S, t) = rf(S, t), \quad S > 0, \quad t < T$$

$$f(S, T) = \max(K - S, 0), \quad S \geq 0$$

där r och σ är konstanta parametrar för räntan respektive volatiliteten. Vid randen $S = 0$ behövs ett villkor för $f(0, t)$ för alla $t < T$. Bestäm ett randvillkor vid $S = 0$ genom att använda Black-Scholes ekvation för $S = 0$.

Funktionen $f(0, t)$ satisfierar

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0, t) = rf(0, t)$$

vars lösning är

$$f(0, t) = e^{rt}C$$

och $f(0, T) = \max(K, 0) = K$ ger $K = e^{rT}C$, så $f(0, t) = K^{-r(T-t)}$.

4.(3 poäng) *Bestäm den lösning till differentialekvationen*

$$x^2 y'(x) + 3xy(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x > 0$$

som uppfyller villkoret $y(\pi) = 0$.

Ekvationen kan skrivas

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{\sin x}{x^3}$$

som har integrerande faktorn $e^{3 \ln x} = x^3$. Vi får

$$(x^3 y)' = \sin x, \quad x > 0$$

vars lösning är $x^3 y(x) = C - \cos x$, så

$$y(x) = x^{-3}(-\cos x + C)$$

och villkoret $y(\pi) = 0$ ger $0 = -\cos \pi + C$. Svar: $y(x) = -x^{-3}(1 + \cos x)$, $x > 0$.

5.(3 poäng) I en enkel populationsmodell för antalet individer, $P(t)$, är den relativa tillväxthastigheten konstant, a . I en annan modell är den relativa tillväxthastigheten summan av två termer. Den ena termen är en positiv konstant, a , och den andra termen är proportionell mot populationen med en negativ proportionalitetskonstant, b . En tredje modell erhålles genom att korrigera den andra modellen på följande sätt: avlägsna ett konstant antal per tidsenhet, c . Ställ upp dessa modeller. Studera därefter vad som händer efter lång tid, då konstanterna sätts till $a = 5$, $b = -1$, $c = 4$.

Första modellen är $P'(t)/P(t) = a$.

Andra modellen är $P'(t)/P(t) = a + bP(t)$.

Den tredje modellen är $P'(t) = P(t)(a + bP(t)) - c$.

Den första modellen har lösningen $P(t) = P(0)e^{5t}$ som växer obegränsat mot oändligheten när $t \rightarrow \infty$.

Den andra modellen $P' = P(5 - P) =: f(P)$ har två jämviktspunkter $P = 0$ och $P = 5$. Den första är instabil, eftersom $f'(P) = -2P + 5$ har $f'(0) = 5 > 0$. Den andra punkten är asymptotiskt stabil, ty $f'(5) = -5 < 0$. Vi får att $P(t) \rightarrow 5$ när $t \rightarrow \infty$.

Den tredje modellen $P' = P(5 - P) - 4 =: g(P)$ har jämviktspunkter P som uppfyller

$$0 = g(P) = -P^2 + 5P - 4 = -(P - 5/2)^2 + (25 - 16)/4$$

så $P = 1$ och $P = 4$. Eftersom $g'(1) = 3 > 0$ är $P = 1$ instabil och $g'(4) = -3 < 0$ visar att $P = 4$ är asymptotiskt stabil. När $t \rightarrow \infty$ får vi att $P(t) \rightarrow 4$.

6.(4 poäng) Antag att en partikels position $(x(t), y(t))$ beskrivs av systemet

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Vad händer med en partikel, som startar i punkten $(2, 3)$, efter lång tid? Bestäm också den allmänna lösningen till systemet.

Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

har egenvärden λ som uppfyller

$$0 = \det(A - \lambda I) = (-2 - \lambda)(-\lambda) + 10 = \lambda^2 + 2\lambda + 10$$

så $(\lambda + 1)^2 = -9$ och $\lambda = -1 \pm 3i$.

Svar: Systemet är asymptotiskt stabilt och $x(t)$ och $y(t)$ konvergerar mot 0 när $t \rightarrow \infty$.

Egenvektor (a, b) till egenvärdet $-1 + 3i$ uppfyller $(-2 + 1 - 3i)a - 10b = 0$, så $a = 1$ och $b = -1/10 - 3i/10$ är en lösning. Den allmänna lösning till systemet är därför

$$\begin{aligned} & c_1 \operatorname{Re}[e^{(-1+3i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -(1+3i)/10 \end{pmatrix}] + c_2 \operatorname{Im}[e^{(-1+3i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -(1+3i)/10 \end{pmatrix}] \\ &= c_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \cos(3t) \\ -e^{-t}(\cos(3t) - 3\sin(3t))/10 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \sin(3t) \\ -e^{-t}(3\cos(3t) + \sin(3t))/10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

för godtyckliga konstanter $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

7.(4 poäng) *En svängande sträng med utböjningen $u(x, t)$ vid positionen x och tiden t löser den partiella differentialekvationen*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

med randvillkoren

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

och begynnelsevillkoren

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x, \quad 0 < x < 1.$$

a) Bestäm utböjningen $u(x, t)$. Svaret får innehålla en oändlig summa.

b) Bestäm också tidpunkterna t när $u(x, t) = 0$ för alla x .

Variabelseparationsmetodens ansats $u(x, t) = X(x)T(t)$ ger i ekvationen

$$T''(t)X(x) - X''(x)T(t) = 0$$

så

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{konstant} = \lambda$$

Ekvationen $X''(x) = \lambda X(x)$ och negativt $\lambda = -\alpha^2$ ger den karakteristiska ekvationen $m^2 + \alpha^2 = 0$ med lösningen $m = \pm i\alpha$ och

$$X(x) = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x), \quad \text{för reella konstanter } A, B.$$

Randvillkoren ger $A = 0$ och $\sin \alpha = 0$ som har lösningen $\alpha = n\pi$ för heltal n .

Om $\lambda \geq 0$ har vi bara lösningen $X(x) = 0$.

Vi får då

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -n^2\pi^2$$

så $T(t) = a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t)$ och $u(x, 0) = 0$ ger $a_n = 0$. Variabelseparationsmetoden har gett oss lösningen

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t) \sin(n\pi x)$$

och

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n\pi \cos(n\pi t) \sin(n\pi x).$$

Begynnelsevillkoret $x = \partial u(x, 0)/\partial t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n\pi \cos(n\pi 0) \sin(n\pi x)$ ger Fourierkoefficienterna

$$\begin{aligned} 2^{-1}n\pi b_n &= \int_0^1 \sin(n\pi x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) dx \\ b_n &= \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin(n\pi x) x dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \left(\left[-\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} x \right]_0^1 + \underbrace{\int_0^1 \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} dx}_{=0} \right) \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2} (-(-1)^n) \end{aligned}$$

och lösningen

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-(-1)^n)}{n^2\pi^2} \sin(n\pi t) \sin(n\pi x).$$

Villkoret $u(x, t) = 0$ för alla x ger ekvationerna $\frac{2(-(-1)^n)}{n^2\pi^2} \sin(n\pi t) = 0$ för alla n , som gäller om och endast om t är heltal.

8.(4 poäng) Lös integralekvationen

$$f(t) = te^t + \int_0^t \tau f(t - \tau) d\tau, \quad t > 0.$$

Vi har Laplacetransformerna

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

$$\mathcal{L}\{t\}(s) = s^{-2}$$

$$\mathcal{L}\{te^t\}(s) = (s-1)^{-2}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau f(t-\tau) d\tau\right\} = \mathcal{L}\{t\}\mathcal{L}\{f\}(s)$$

så Laplacetransformering av ekvationen ger

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{F(s)}{s^2}$$

vars lösning är

$$F(s) = \frac{s^2}{(s-1)^2} \frac{1}{(s^2-1)} = \frac{s^2}{(s-1)^3(s+1)}$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{s^2}{(s-1)^3(s+1)} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s-1} + \frac{c}{(s-1)^2} + \frac{d}{(s-1)^3} = \frac{s^3(a+b) + s^2(-3a-b+c) + s(3a-b+d)}{(s-1)^3(s+1)}$$

som ger $a = -1/8, b = 1/8, c = 3/4, d = 1/2$ och lösningen

$$f(t) = -\frac{1}{8}e^{-t} + \frac{1}{8}e^t + \frac{3te^t}{4} + \frac{t^2e^t}{4}, \quad t \geq 0.$$

9.(5 poäng) Temperaturen $u(x, t)$ i en oändlig stav, vid tiden $t > 0$ och positionen $x \in \mathbb{R}$, bestäms av ekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

där $f(x) = -(4x^2 - 2)e^{-x^2}$ är en given källa.

a) Visa att den stationära temperaturfördelningen $u_s(x) = e^{-x^2}$ löser

$$0 = \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2}(x, t) + f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

b) Bestäm $u(x, t)$ om $u(x, 0) = u_s(x) + 2^{-1}xe^{-x^2/4}$.

a) Derivering ger

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(-2xe^{-x^2}) = (4x^2 - 2)e^{-x^2} = -f(x).$$

b) Funktionen $v(x, t) = u(x, t) - u_s(x, t)$ uppfyller

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_s}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

så Fouriertransformering $\hat{v}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x, t) e^{-i\omega x} dx$ i x -led ger

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t}(\omega, t) = -\omega^2 \hat{v}(\omega, t)$$

vars lösning är

$$\hat{v}(\omega, t) = e^{-\omega^2 t} \hat{v}(\omega, 0) = -e^{-\omega^2 t} i\omega e^{-\omega^2} \sqrt{4\pi} = -i\omega e^{-\omega^2(1+t)} \sqrt{4\pi}.$$

Dess inverstransformen är

$$v(x, t) = -\frac{d}{dx} \left((1+t)^{-1/2} e^{-x^2/(4(1+t))} \right) = \frac{x}{2(1+t)^{3/2}} e^{-x^2/(4(1+t))},$$

och $u(x, t) = u_s(x) + v(x, t) = e^{-x^2} + \frac{x}{2(1+t)^{3/2}} e^{-x^2/(4(1+t))}.$

10.(5 poäng) Antag att $u(x, t)$ är en lösning till Burgers ekvation

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + u(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Burgers ekvation är en förenklad modell av kompressibel strömning.

a) Visa att banor definierade av

$$X'(t) = u(X(t), t), \quad t > 0$$

uppfyller

$$X'(t) = u(X(0), 0).$$

b) Antag att $u(y, 0) = y$. Bestäm $u(x, t)$.

a) Kedjeregeln och ekvationen ger

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(X(t), t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(X(t), t) + X'(t) \frac{\partial u}{\partial x}(X(t), t) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(X(t), t) + u(X(t), t) \frac{\partial u}{\partial x}(X(t), t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

så $u(X(t), t) = u(X(0), 0)$, vilket med banans definition visar att

$$X'(t) = u(X(0), 0), \quad t > 0.$$

b) Vi har visat att banorna är rätta linjer som uppfyller

$$(1) \quad X'(s) = u(X(0), 0), \quad s > 0$$

och funktionen u är konstant längs en bana

$$(2) \quad u(X(s), s) = u(X(0), 0).$$

Antag att $X(0) = y$ och $X(t) = x$. Ekvation (1) ger

$$X'(s) = u(X(0), 0) = y$$

så

$$X(s) = ys + X(0) = ys + y.$$

Detta ger $x = X(t) = y(1 + t)$ och vi får $y = x/(1 + t)$. Ekvation (2) medför att

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(X(t), t) \\ &= u(X(0), 0) \\ &= y \\ &= \frac{x}{1 + t}, \end{aligned}$$

vilket visar vårt svar $u(x, t) = x/(1 + t)$.

Alternativ uppgift 10.(4 poäng) *Visa att lösningen till differentialekvation $X'(t) = f(X(t))$ med givet begynnelsevärde $X(0) = X_0$ är entydig om f är Lipschitzkontinuerlig. Formulera Grönwalls lemma om det används.*

Se Kapitel 3 i sidorna "Eulers metod".