

Kontrollskrivning 1, version B,
i SF1635 Signaler och system I.
fredag 11 november 2011, klockan 10.15–11.15
LÖSNINGSFÖRSLAG

- 1) För $x \neq \sqrt{3}$ observerar vi att ekv(1) i texten kan skrivas som

$$y' = \frac{x(2y^2 + 9)}{y(x^2 - 3)} \quad (1)$$

som i sin tur leder till

$$\int \frac{y dy}{2y^2 + 9} = \int \frac{x dx}{x^2 - 3} \quad (2)$$

ma o

$$\frac{1}{4} \ln(2y^2 + 9) = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 3| + \frac{C_1}{2} \quad (3)$$

och delsvaret blir

$$2y^2 + 9 = C_2(x^2 - 3)^2, \text{ med } C_2 = e^{2C_1} \quad (4)$$

Med insatt villkor $y(2\sqrt{3}) = 6$ blir $C_2 = 1$ och vi får svaret

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}(-9 + (x^2 - 3)^2)}, \quad x \geq \sqrt{6}$$

-
- 2) Vi börjar med att skriva systemet på matrisform

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} \text{ med } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

och kommer ihåg att svaret får formen

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2 = c_1 \mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{K}_2 e^{\lambda_2 t}$$

Vi bestämmer som vanligt först det karakteristiska polynomet

$$p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 9 \\ -4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 37 = 0$$

som har det komplexa rötterna $\lambda_{1,2} = 1 \pm 6i$. P g a att rötterna är komplex konjugerade vet vi att $\mathbf{X}_2 = \overline{\mathbf{X}_1}$ så vi behöver endast beräkna $\text{Re}\{\mathbf{X}_1\}$ och $\text{Im}\{\mathbf{X}_1\}$.

Om vi väljer $\lambda_1 = 1 + 6i$ och $\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ får vi sambandet

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda_1 & 9 \\ -4 & 1 - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6i & 9 \\ -4 & -6i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

med en lösning, tex $k_1 = -3i$ och $k_2 = 2$ m a o

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_1 = \mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} &= \begin{bmatrix} -3i \\ 2 \end{bmatrix} e^{(1+6i)t} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} e^t (\cos 6t + i \sin 6t) \\ &= e^t \left\{ \begin{bmatrix} 3 \sin 6t \\ 2 \cos 6t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -3 \cos 6t \\ 2 \sin 6t \end{bmatrix} \right\}\end{aligned}$$

som representerar 2 linjärt oberoende reella lösningar och därför blir svaret:

$$\boxed{\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = d_1 e^t \begin{bmatrix} 3 \sin 6t \\ 2 \cos 6t \end{bmatrix} + d_2 e^t \begin{bmatrix} -3 \cos 6t \\ 2 \sin 6t \end{bmatrix}}$$
