KTH Matematik
B.Ek

Lösningsförslag ks1, Signaler och system I, 16 september 2010

AC1) Lös begynnelsevärdesproblemet och ange det största intervall där lösningen är definierad

$$\begin{cases} xy' + 4y = \dfrac{\sin x}{x^3} \\ y(\pi) = 1. \end{cases}$$

Lösning:

För att finna den integrerande faktorn dividerar vi ekvationen med x, koefficienten för y', och får $y' + \frac{4}{x}y = \frac{\sin x}{x^4}$.

En integrerande faktor till denna är $e^{\int \frac{4}{x}\,dx} = e^{4\ln|x|} = |x|^4 = x^4$. Multipliceras ekvationen med den fås $x^4y' + 4x^3y = (x^4y)' = \sin x$, så $x^4y(x) = \int \sin x\,dx = -\cos x + C$, C en godtycklig konstant. Den allmänna lösningen till ekvationen är alltså $y(x) = \frac{1}{x^4}(-\cos x + C)$, C konstant.
Begynnelsevillkoret $y(\pi) = 1$ ger $1 = \frac{1}{\pi^4}(1 + C)$, så $C = \pi^4 - 1$ och

Svar: Den sökta lösningen är $y(x) = \frac{1}{x^4}(\pi^4 - 1 - \cos x)$,
definierad i intervallet $x > 0$, men inte i något större intervall.

AC2) Visa att $y_1(x) = e^{-3x}$ och $y_2(x) = x\,e^{-3x}$ är lösningar till ekvationen

$$y'' + 6y' + 9y = 0.$$

Använd detta för att finna den allmänna lösningen till ekvationen

$$y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}\ln x, \quad x > 0.$$

Lösning:

Insättning av y_1 och y_2 i den homogena ekvationen visar att de är lösningar. Eftersom ekvationen har konstanta koefficienter kan man också få y_1 och y_2 genom att lösa den karakteristiska ekvationen etc.
För att lösa den inhomogena ekvationen, använder vi variation av parametrar. Lösningen är då $y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = e^{-3x}u_1(x) + xe^{-3x}u_2(x)$, där u_1, u_2 uppfyller

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3x} & xe^{-3x} \\ -3e^{-3x} & (-3x+1)e^{-3x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-3x}\ln x \end{pmatrix}$$

(koefficienten för y'' i ODE:n är 1, så dess HL finns i sista ledet.) Så

$$\begin{cases} u_1' + xu_2' & = 0 \\ -3u_1' + (-3x+1)u_2' & = \ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1' & = -x\ln x \\ u_2' & = \ln x, \end{cases}$$

Med (partial)integration fås $u_1 = -\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + c_1$, $u_2 = x\ln x - x + c_2$, där c_1, c_2 förstås är godtyckliga konstanter. Insättning ger $y(x) = e^{-3x}u_1(x) + xe^{-3x}u_2(x) = (-\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + c_1)e^{-3x} + (x\ln x - x + c_2)xe^{-3x}$ och

Svar: Den allmänna lösningen är (med c_1, c_2 godtyckliga konstanter)

$$y(x) = \frac{x^2}{2}\,e^{-3x}\ln x - \frac{3x^2}{4}\,e^{-3x} + c_1e^{-3x} + c_2xe^{-3x}.$$

BD1) Lös begynnelsevärdesproblemet och ange det största intervall där lösningen är definierad

$$\begin{cases} xy' + 3y = \dfrac{\cos x}{x^2} \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1. \end{cases}$$

Lösning:

För att finna den integrerande faktorn dividerar vi ekvationen med x, koefficienten för y', och får $y' + \frac{3}{x}y = \frac{\cos x}{x^3}$.

En integrerande faktor till denna är $e^{\int \frac{3}{x}\,dx} = e^{3\ln|x|} = |x|^3$. Multipliceras ekvationen med x^3 fås $x^3y' + 3x^2y = (x^3y)' = \cos x$, så $x^3y(x) = \int \cos x\,dx = \sin x + C$, C en godtycklig konstant. Den allmänna lösningen till ekvationen är alltså $y(x) = \frac{1}{x^3}(\sin x + C)$, C konstant.

Begynnelsevillkoret $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ ger $1 = \frac{1}{(\frac{\pi}{2})^3}(1 + C)$, så $C = (\frac{\pi}{2})^3 - 1$ och

Svar: Den sökta lösningen är $y(x) = \frac{1}{x^3}(\sin x + (\frac{\pi}{2})^3 - 1)$,
definierad i intervallet $x > 0$, men inte i något större intervall.

BD2) Visa att $y_1(x) = e^{2x}$ och $y_2(x) = x\,e^{2x}$ är lösningar till ekvationen

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Använd detta för att finna den allmänna lösningen till ekvationen

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\ln x, \quad x > 0.$$

Lösning:

Insättning av y_1 och y_2 i den homogena ekvationen visar att de är lösningar. Eftersom ekvationen har konstanta koefficienter kan man också få y_1 och y_2 genom att lösa den karakteristiska ekvationen etc.

För att lösa den inhomogena ekvationen, använder vi variation av parametrar. Lösningen är då $y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = e^{2x}u_1(x) + xe^{2x}u_2(x)$, där u_1, u_2 uppfyller

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & (2x+1)e^{2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x}\ln x \end{pmatrix}$$

(koefficienten för y'' i ODE:n är 1, så dess HL finns i sista ledet.) Så

$$\begin{cases} u_1' + xu_2' & = 0 \\ 2u_1' + (2x+1)u_2' & = \ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1' & = -x\ln x \\ u_2' & = \ln x, \end{cases}$$

Med (partial)integration fås $u_1 = -\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + c_1$, $u_2 = x\ln x - x + c_2$, där c_1, c_2 förstås är godtyckliga konstanter. Insättning ger $y(x) = e^{2x}u_1(x) + xe^{2x}u_2(x) = (-\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + c_1)e^{2x} + (x\ln x - x + c_2)xe^{2x}$ och

Svar: Den allmänna lösningen är (med c_1, c_2 godtyckliga konstanter)

$$\boldsymbol{y(x) = \frac{x^2}{2}\,e^{2x}\ln x - \frac{3x^2}{4}\,e^{2x} + c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}.}$$
