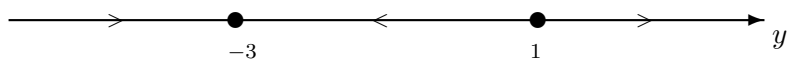
KTH Matematik
B.Ek

Lösningsförslag ks1, Signaler och system I, 18 november 2010

A1) Vi har differentialekvationen $y' = (y-1)(y+3)$ och söker **a)** ett fasporträtt, **b)** den allmänna lösningen $y(x)$ (implicit), **c)** lösningen med $y(0) = 0$ (implicit) och **d)** lösningen i c) på explicit form.

Lösning:
Kritiska punkter ges av $(y-1)(y+3) = 0$, så $y = -3,\ 1$. Teckenväxlingen ger **fasporträttet:**



Ekvationen är separabel. $y(x) = -3,\ 1$ är lösningar (kritiska punkter). Annars fås (partialbråksuppdelning) $\frac{y'}{(y-1)(y+3)} = \left(\frac{\frac{1}{4}}{y-1} - \frac{\frac{1}{4}}{y+3}\right) y' = 1$. Integration $\int \ldots dx$ ger $\frac{1}{4}\ln|y-1| - \frac{1}{4}\ln|y+3| = x + C$, så $\left|\frac{y-1}{y+3}\right| = e^{4(x+C)}$, dvs $\boldsymbol{\frac{y-1}{y+3} = De^{4x}}$, $D(= \pm e^{4C})$ godtycklig konstant $\neq 0$, men $D = 0$ ger lösningen $y(x) = 1$.
$y(0) = 0$ ger $\frac{-1}{3} = D$, så $\boldsymbol{\frac{y-1}{y+3} = -\frac{1}{3}e^{4x}} = 1 - \frac{4}{y+3}$. Vi kan lösa ut
$\boldsymbol{y(x) = \frac{4}{1+\frac{1}{3}e^{4x}} - 3}$. (Och får fasporträttets resultat, $y(x) \to -3,\ 1$ då $x \to \pm\infty$).

Svar: a) Se ovan, c, d) lösning $\boldsymbol{\frac{y-1}{y+3} = -\frac{1}{3}e^{4x}}$, dvs $\boldsymbol{y(x) = \frac{4}{1+\frac{1}{3}e^{4x}} - 3}$,
b) allmän lösning $\boldsymbol{\frac{y-1}{y+3} = De^{4x}}$, $\boldsymbol{D}$ konstant, eller $\boldsymbol{y(x) = -3}$.

A2) Vi söker **a)** alla $x(t)$, $y(t)$ som uppfyller $x' = 4x - 3y$, $y' = 2x - y$ och **b)** en fundamentalmatris $\mathbf{\Phi}(t)$ för systemet i a) och med hjälp av den alla $x(t)$, $y(t)$ som uppfyller $x' = 4x - 3y - e^t$, $y' = 2x - y$.

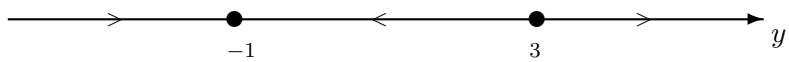
Lösning:
Låt $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Vi har $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, med $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
$\mathbf{A}$:s egenvärden: $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-2)(\lambda-1)$, så $\lambda_{1,2} = 2,\ 1$.
Egenvektor till $\lambda_1 = 2$: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Vi kan ta $\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Egenvektor till $\lambda_2 = 1$: $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Vi kan ta $\mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Allmän lösning: $\boldsymbol{\mathbf{x}(t) = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$, c_1, c_2 godtyckliga konstanter.
En fundamentalmatris har linjärt oberoende lösningar som kolonner, vi tar $\boldsymbol{\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} & e^t \\ 2e^{2t} & e^t \end{pmatrix}}$.
För att lösa det inhomogena systemet använder vi variation av parametrar.
Lösningen skrivs då $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{u}(t)$, där $\mathbf{u}(t)$ bestäms av $\mathbf{\Phi}\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} -e^t \\ 0 \end{pmatrix}$.
$\mathbf{\Phi}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & -e^{-2t} \\ -2e^{-t} & 3e^{-t} \end{pmatrix}$, så $\mathbf{u}' = \mathbf{\Phi}^{-1}\begin{pmatrix} -e^t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} + c_1 \\ 2t + c_2 \end{pmatrix}$.
Det ger allmänna lösningen $\boldsymbol{\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t + 2te^t \\ 2te^t \end{pmatrix} + c_3 e^{2t}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_4 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$.
($c_3 = c_1$, $c_4 = c_2 + 2$.).

Svar: a) Allmän lösning $\boldsymbol{x(t) = 3c_1 e^{2t} + c_2 e^t}$, $\boldsymbol{y(t) = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^t}$,
b) fundamentalmatris $\boldsymbol{\Phi(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} & e^t \\ 2e^{2t} & e^t \end{pmatrix}}$, allmän lösning
$\boldsymbol{x(t) = 2te^t + 3c_3 e^{2t} + (c_4 + 1)e^t}$, $\boldsymbol{y(t) = 2te^t + 2c_3 e^{2t} + c_4 e^t}$.
(I båda fallen $\boldsymbol{c_i}$ godtyckliga konstanter.)
(Alternativt kan man få partikulärlösningen med ansatsen $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{a}e^t + \mathbf{b}te^t$, sätta in i ekvationen etc.)

B1) Vi har differentialekvationen $y' = (y+1)(y-3)$ och söker **a)** ett fasporträtt, **b)** den allmänna lösningen $y(x)$ (implicit), **c)** lösningen med $y(0) = 0$ (implicit) och **d)** lösningen i c) på explicit form.

Lösning:

Kritiska punkter ges av $(y+1)(y-3) = 0$, så $y = -1,\ 3$. Teckenväxlingen ger **fasporträttet:**



Ekvationen är separabel. $y(x) = -1,\ 3$ är lösningar (kritiska punkter). Annars fås (partialbråksuppdelning) $\frac{y'}{(y+1)(y-3)} = \left(\frac{\frac{1}{4}}{y-3} - \frac{\frac{1}{4}}{y+1}\right) y' = 1$. Integration $\int \ldots dx$ ger $\frac{1}{4}\ln|y-3| - \frac{1}{4}\ln|y+1| = x + C$, så $\left|\frac{y-3}{y+1}\right| = e^{4(x+C)}$, dvs $\boldsymbol{\frac{y-3}{y+1} = De^{4x}}$, $D(= \pm e^{4C})$ godtycklig konstant $\neq 0$, men $D = 0$ ger lösningen $y(x) = 3$.
$y(0) = 0$ ger $\frac{-3}{1} = -3 = D$, så $\boldsymbol{\frac{y-3}{y+1} = -3e^{4x}} = 1 - \frac{4}{y+1}$. Vi kan lösa ut
$\boldsymbol{y(x) = \frac{4}{1+3e^{4x}} - 1}$. (Och får fasporträttets resultat, $y(x) \to -1,\ 3$ då $x \to \pm\infty$).

Svar: a) Se ovan, c, d) lösning $\boldsymbol{\frac{y-3}{y+1} = -3e^{4x}}$, dvs $\boldsymbol{y(x) = \frac{4}{1+3e^{4x}} - 1}$,
b) allmän lösning $\boldsymbol{\frac{y-3}{y+1} = De^{4x}}$, $\boldsymbol{D}$ konstant, eller $\boldsymbol{y(x) = -1}$.

B2) Vi söker **a)** alla $x(t)$, $y(t)$ som uppfyller $x' = 5x - 3y$, $y' = 4x - 2y$ och **b)** en fundamentalmatris $\mathbf{\Phi}(t)$ för systemet i a) och med hjälp av den alla $x(t)$, $y(t)$ som uppfyller $x' = 5x - 3y - e^t$, $y' = 4x - 2y$.

Lösning:

Låt $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Vi har $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, med $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.
$\mathbf{A}$:s egenvärden: $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-2)(\lambda-1)$, så $\lambda_{1,2} = 2,\ 1$.
Egenvektor till $\lambda_1 = 2$: $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Vi kan ta $\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Egenvektor till $\lambda_2 = 1$: $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Vi kan ta $\mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Allmän lösning: $\boldsymbol{\mathbf{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}$, c_1, c_2 godtyckliga konstanter.
En fundamentalmatris har linjärt oberoende lösningar som kolonner, vi tar $\boldsymbol{\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 3e^t \\ e^{2t} & 4e^t \end{pmatrix}}$.
För att lösa det inhomogena systemet använder vi variation av parametrar.
Lösningen skrivs då $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{u}(t)$, där $\mathbf{u}(t)$ bestäms av $\mathbf{\Phi}\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} -e^t \\ 0 \end{pmatrix}$.
$\mathbf{\Phi}^{-1} = \begin{pmatrix} 4e^{-2t} & -3e^{-2t} \\ -e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}$, så $\mathbf{u}' = \mathbf{\Phi}^{-1} \begin{pmatrix} -e^t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} 4e^{-t} + c_1 \\ t + c_2 \end{pmatrix}$.
Det ger allmänna lösningen $\boldsymbol{\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t + 3te^t \\ 4te^t \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_4 e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}$.
($c_3 = c_1$, $c_4 = c_2 + 1$.).

Svar: a) Allmän lösning $\boldsymbol{x(t) = c_1 e^{2t} + 3c_2 e^t}$, $\boldsymbol{y(t) = c_1 e^{2t} + 4c_2 e^t}$,
b) fundamentalmatris $\boldsymbol{\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 3e^t \\ e^{2t} & 4e^t \end{pmatrix}}$, allmän lösning
$\boldsymbol{x(t) = 3te^t + c_3 e^{2t} + (3c_4 + 1)e^t}$, $\boldsymbol{y(t) = 4te^t + c_3 e^{2t} + 4c_4 e^t}$.
(I båda fallen $\boldsymbol{c_i}$ godtyckliga konstanter.)

(Alternativt kan man få partikulärlösningen med ansatsen $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{a}e^t + \mathbf{b}te^t$, sätta in i ekvationen etc.)
