KTH Matematik
F J Čech

A

Kontrollskrivning 2, version A,
i SF1635 Signaler och system I.
måndag 12 december 2011, klockan 13.15–14.15

LÖSNINGSFÖRSLAG

---

1) $\mathscr{L}$-transformering av ODE'n i texten ger med hänsyn till att $y(0) = -1$

$$sY(s) - (-1) + 3\,Y(s) = F(s) = \left(\frac{4}{s}\right)\left(1 - e^{-5s}\right) \tag{1}$$

så

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{F(s)}{s+3} - \frac{1}{s+3} = \frac{4}{s(s+3)}\left(1 - e^{-5s}\right) - \frac{1}{s+3} = && (2)\\ &= G(s)\left(1 - e^{-5s}\right) - \frac{1}{s+3} = G(s) - G(s)e^{-5s} - \frac{1}{s+3} && (3) \end{aligned}$$

Med hjälp av partialbråksuppdelning och formelbladet fås sedan inverstransformen av $G(s)$

$$G(s) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+3}\right) \quad \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \quad g(t) = \frac{4}{3}\left(1 - e^{-3t}\right)\mathcal{U}(t) \tag{4}$$

vilket med bytet $t \to t - 5$ i fördröjningstermen i ekv(3) leder sammanfattningsvis till

$$\begin{aligned} y(t) &= g(t) - g(t-5) - e^{-3t}\mathcal{U}(t) = && (5)\\ &= \frac{4}{3}\left(1 - e^{-3t}\right)\mathcal{U}(t) - \frac{4}{3}\left(1 - e^{-3(t-5)}\right)\mathcal{U}(t-5) - e^{-3t}\mathcal{U}(t) && (6) \end{aligned}$$

och efter förenkling ger svaret

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{3}\left(4 - 7\,e^{-3t}\right)\mathcal{U}(t) - \frac{4}{3}\left(1 - e^{-3(t-5)}\right)\mathcal{U}(t-5)}$$

---

2) Vi observerar att det ingår $\mathrm{e}^{-4|\omega|}$ i det givna $F(\omega)$ och studerar därför

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-4|\omega|} = X(\omega) \quad &\xrightarrow{\mathscr{F}^{-1}} \quad x(t) = \frac{4}{(4^2 + t^2)\pi}\\ \mathrm{e}^{j2\omega}\mathrm{e}^{-4|\omega|} = \mathrm{e}^{j2\omega}X(\omega) \quad &\xrightarrow{\mathscr{F}^{-1}} \quad x(t+2) = \frac{4}{(4^2 + (t+2)^2)\pi}\\ \omega\,\left(\mathrm{e}^{j2\omega}\,\mathrm{e}^{-4|\omega|}\right) \quad &\xrightarrow{\mathscr{F}^{-1}} \quad \frac{1}{j}\frac{d}{dt}\,x(t+2) = \frac{4j}{\pi}\frac{2(t+2)}{(4^2 + (t+2)^2)^2} \end{aligned}$$

som ger svaret

$$\boxed{f(t) = \frac{8j}{\pi}\frac{(t+2)}{(4^2 + (t+2)^2)^2}}$$