KTH Matematik
B.Ek

Lösningsförslag ks2, Signaler och system I, 13 oktober 2010

A1) Låt a och b vara positiva konstanter och bestäm funktionen

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau\, d\tau}{(\tau^2 + a^2)((t-\tau)^2 + b^2)},$$

dvs $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t-\tau)\, d\tau$, där $g(t) = \frac{t}{t^2+a^2}$ och $h(t) = \frac{1}{t^2+b^2}$.
Svaret får inte innehålla faltningar eller integraler.

Lösning:
$f(t)$ är faltningen $(g * h)(t)$, så (fs NO) fouriertransformen $F(\omega)$ är produkten av transformerna $G(\omega)$ och $H(\omega)$. $\frac{1}{t^2+a^2}$ har (fs NV) fouriertransformen $\frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$, så (fs NO) $g(t)$ har transformen $G(\omega) = i\frac{d}{d\omega}(\frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}) = i\frac{\pi}{a}(-a\,\mathrm{sgn}(\omega))e^{-a|\omega|} = -i\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)e^{-a|\omega|}$ (om man inte minns att $\frac{d|\omega|}{d\omega} = \mathrm{sgn}(\omega)$ kan $\frac{d|\omega|}{d\omega}$ stå kvar). $h(t)$ har transformen $H(\omega) = \frac{\pi}{b}e^{-b|\omega|}$ så $f(t) = (g*h)(t)$ har transformen $F(\omega) = G(\omega)H(\omega) = \frac{\pi}{b}(-i\pi\,\mathrm{sgn}(\omega))e^{-(a+b)|\omega|}$, vilket som ovan för $g(t)$ är transformen av $\frac{\pi}{b}\frac{t}{t^2+(a+b)^2}$.

Svar: Funktionen är $f(t) = \frac{\pi}{b}\frac{t}{t^2+(a+b)^2}$.

A2) Använd **laplacetransform** för att finna $y(t)$ som uppfyller

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 30\, e^{-3t}\,\mathcal{U}(t-2) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

($\mathcal{U}(t)$ är här Heavisides stegfunktion, ibland kallad $H(t)$, $\theta(t)$ och $u(t)$.)

Lösning:
HL är $30\, e^{-3t}\,\mathcal{U}(t-2) = 30\, e^{-6}e^{-3(t-2)}\,\mathcal{U}(t-2)$, så (fs SO) laplacetransformering av ekvationen ger $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - (sY(s) - y(0)) - 2Y(s) = 30\, e^{-6}e^{-2s}\mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \frac{30\, e^{-6}\, e^{-2s}}{s+3}$. Med begynnelsevillkoren ger det att $(s^2 - s - 2)Y(s) = (s+1)(s-2)Y(s) = \frac{30\, e^{-6}\, e^{-2s}}{s+3}$ och $Y(s) = \frac{30\, e^{-6}\, e^{-2s}}{(s+1)(s-2)(s+3)} = e^{-6}\, e^{-2s}(-\frac{5}{s+1} + \frac{2}{s-2} + \frac{3}{s+3})$ (med partialbråksuppdelning). Fs igen ger

Svar: $y(t) = e^{-6}(-5e^{-(t-2)} + 2e^{2(t-2)} + 3e^{-3(t-2)})\,\mathcal{U}(t-2)$.

B1) Låt a och b vara positiva konstanter och bestäm funktionen

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-\tau)\,d\tau}{(\tau^2+a^2)((t-\tau)^2+b^2)},$$

dvs $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$, där $g(t) = \frac{1}{t^2+a^2}$ och $h(t) = \frac{t}{t^2+b^2}$.
Svaret får inte innehålla faltningar eller integraler.

Lösning:
$f(t)$ är faltningen $(g*h)(t)$, så (fs NO) fouriertransformen $F(\omega)$ är produkten av transformerna $G(\omega)$ och $H(\omega)$. $\frac{1}{t^2+b^2}$ har (fs NV) fouriertransformen $\frac{\pi}{b}e^{-b|\omega|}$, så (fs NO) $h(t)$ har transformen $H(\omega) = i\frac{d}{d\omega}(\frac{\pi}{b}e^{-b|\omega|}) = i\frac{\pi}{b}(-b\,\mathrm{sgn}(\omega))e^{-b|\omega|} = -i\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)e^{-b|\omega|}$ (om man inte minns att $\frac{d|\omega|}{d\omega} = \mathrm{sgn}(\omega)$ kan $\frac{d|\omega|}{d\omega}$ stå kvar). $g(t)$ har transformen $G(\omega) = \frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$ så $f(t) = (g*h)(t)$ har transformen $F(\omega) = G(\omega)H(\omega) = \frac{\pi}{a}(-i\pi\,\mathrm{sgn}(\omega))e^{-(a+b)|\omega|}$, vilket som ovan för $h(t)$ är transformen av $\frac{\pi}{a}\frac{t}{t^2+(a+b)^2}$.
Svar: Funktionen är $\boldsymbol{f(t) = \frac{\pi}{a}\frac{t}{t^2+(a+b)^2}}$.

B2) Använd **laplacetransform** för att finna $y(t)$ som uppfyller

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 12\,e^{-2t}\mathcal{U}(t-3) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

($\mathcal{U}(t)$ är här Heavisides stegfunktion, ibland kallad $H(t)$, $\theta(t)$ och $u(t)$.)

Lösning:
HL är $12\,e^{-2t}\mathcal{U}(t-3) = 12\,e^{-6}e^{-2(t-3)}\mathcal{U}(t-3)$, så (fs SO) laplacetransformering av ekvationen ger $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2(sY(s) - y(0)) - 3Y(s) = 12\,e^{-6}e^{-3s}\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \frac{12\,e^{-6}\,e^{-3s}}{s+2}$. Med begynnelsevillkoren ger det att $(s^2 + 2s - 3)Y(s) = (s-1)(s+3)Y(s) = \frac{12\,e^{-6}\,e^{-3s}}{s+2}$ och $Y(s) = \frac{12\,e^{-6}\,e^{-3s}}{(s-1)(s+3)(s+2)} = e^{-6}\,e^{-3s}(\frac{1}{s-1} + \frac{3}{s+3} - \frac{4}{s+2})$ (med partialbråksuppdelning). Fs igen ger
Svar: $\boldsymbol{y(t) = e^{-6}(e^{t-3} + 3e^{-3(t-3)} - 4e^{-2(t-3)})\mathcal{U}(t-3)}$.
