

Institutionen för matematik

KTH

B.Ek

Lösningsförslag ks2, Signaler och system I, 9 december 2010

A1) Låt $\varphi(t)$ vara en funktion med fouriertransform $\Phi(\omega) = e^{-\omega^4}$.

Bestäm fouriertransformen $X(\omega)$ till funktionen

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau e^{-(t-\tau)^4} d\tau}{\tau^2 + 4\tau + 29}.$$

Svaret får innehålla funktionen φ , men inga faltningar eller integraler.

Lösning:

$x(t)$ är faltningen $e^{-t^4} * \frac{t}{t^2+4t+29}$, så (fb NO) fouriertransformen $X(\omega)$ är produkten av de två funktionernas transformer.

e^{-t^4} har (dualitet, fb NO) fouriertransformen $2\pi\varphi(-\omega)$.

$\frac{1}{t^2+25}$ har (fb NV) fouriertransformen $\frac{\pi}{5}e^{-5|\omega|}$, så (fb NO) $\frac{1}{t^2+4t+29} = \frac{1}{(t+2)^2+25}$ har transformen $e^{i2\omega}\frac{\pi}{5}e^{-5|\omega|}$ och $\frac{t}{t^2+4t+29}$ har (fb NO) transformen $i\frac{d}{d\omega}(e^{i2\omega}\frac{\pi}{5}e^{-5|\omega|}) = i\frac{\pi}{5}(2i - 5\operatorname{sgn}(\omega))e^{2i\omega-5|\omega|}$. ($\frac{d|\omega|}{d\omega} = \operatorname{sgn}(\omega)$, ju.)

Den sökta transformen fås som produkten,

Svar: Transformen är $X(\omega) = \frac{2\pi^2 i}{5}(2i - 5\operatorname{sgn}(\omega))e^{2i\omega-5|\omega|}\varphi(-\omega)$.

A2) Vi betraktar begynnelsevärdesproblemets

$$\begin{cases} y' + 3y = \begin{cases} 9t, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t \end{cases} \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

a) Bestäm laplacetransformen $Y(s)$ av lösningen $y(t)$ till problemet.

b) Använd $Y(s)$ för att bestämma $y(t)$.

Lösning:

HL är $9t(1 - \mathcal{U}(t-1)) = 9t - 9((t-1)+1)\mathcal{U}(t-1)$, så (fb SO) laplacetransformering av ekvationen ger $sY(s) - y(0) + 3Y(s) = sY(s) - 2 + 3Y(s) = \frac{9}{s^2} - (\frac{9}{s^2} + \frac{9}{s})e^{-s}$. Det ger $Y(s) = \frac{2}{s+3} + \frac{9}{(s+3)s^2} - (\frac{9}{(s+3)s^2} + \frac{9}{(s+3)s})e^{-s}$. Med partialbråksuppdelning $Y(s) = \frac{2}{s+3} + \frac{1}{s+3} + \frac{3}{s^2} - \frac{1}{s} - (\frac{1}{s+3} + \frac{3}{s^2} - \frac{1}{s} - \frac{3}{s+3} + \frac{3}{s})e^{-s} = \frac{3}{s+3} + \frac{3}{s^2} - \frac{1}{s} - (-\frac{2}{s+3} + \frac{3}{s^2} + \frac{2}{s})e^{-s}$.

Med fb igen $y(t) = 3e^{-3t} + 3t - 1 - (-2e^{-3(t-1)} + 3(t-1) + 2)\mathcal{U}(t-1)$ och uppdelning på intervallen ger svaret.

Svar a): $Y(s) = \frac{2}{s+3} + \frac{9}{(s+3)s^2} - (\frac{9}{(s+3)s^2} + \frac{9}{(s+3)s})e^{-s}$,

b): $y(t) = \begin{cases} 3e^{-3t} + 3t - 1, & 0 < t < 1 \\ (3 + 2e^3)e^{-3t}, & 1 < t. \end{cases}$

B1) Låt $\varphi(t)$ vara en funktion med fouriertransform $\Phi(\omega) = e^{-\omega^6}$.

Bestäm fouriertransformen $X(\omega)$ till funktionen

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau e^{-(t-\tau)^6} d\tau}{\tau^2 + 6\tau + 34}.$$

Svaret får innehålla funktionen φ , men inga faltningar eller integraler.

Lösning:

$x(t)$ är faltningen $e^{-t^6} * \frac{t}{t^2+6t+34}$, så (fb NO) fouriertransformen $X(\omega)$ är produkten av de två funktionernas transformer.

e^{-t^6} har (dualitet, fb NO) fouriertransformen $2\pi\varphi(-\omega)$.

$\frac{1}{t^2+25}$ har (fb NV) fouriertransformen $\frac{\pi}{5}e^{-5|\omega|}$, så (fb NO) $\frac{1}{t^2+6t+34} = \frac{1}{(t+3)^2+25}$ har transformen $e^{i3\omega}\frac{\pi}{5}e^{-5|\omega|}$ och $\frac{t}{t^2+6t+34}$ har (fb NO) transformen $i\frac{d}{d\omega}(e^{i3\omega}\frac{\pi}{5}e^{-5|\omega|}) = i\frac{\pi}{5}(3i - 5\operatorname{sgn}(\omega))e^{3i\omega-5|\omega|}$. ($\frac{d|\omega|}{d\omega} = \operatorname{sgn}(\omega)$, ju.)

Den sökta transformen fås som produkten,

Svar: Transformen är $X(\omega) = \frac{2\pi^2 i}{5}(3i - 5\operatorname{sgn}(\omega))e^{3i\omega-5|\omega|}\varphi(-\omega)$.

B2) Vi betraktar begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' + 2y = \begin{cases} 4t, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t \end{cases} \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

a) Bestäm laplacetransformen $Y(s)$ av lösningen $y(t)$ till problemet.

b) Använd $Y(s)$ för att bestämma $y(t)$.

Lösning:

HL är $4t(1 - \mathcal{U}(t-1)) = 4t - 4((t-1)+1)\mathcal{U}(t-1)$, så (fb SO) laplacetransformering av ekvationen ger $sY(s) - y(0) + 2Y(s) = sY(s) - 3 + 2Y(s) = \frac{4}{s^2} - (\frac{4}{s^2} + \frac{4}{s})e^{-s}$. Det ger $Y(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{4}{(s+2)s^2} - (\frac{4}{(s+2)s^2} + \frac{4}{(s+2)s})e^{-s}$. Med partialbråksuppdelning $Y(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s+2} + \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} - (\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} - \frac{2}{s+2} + \frac{2}{s})e^{-s} = \frac{4}{s+2} + \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} - (-\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s})e^{-s}$.

Med fb igen $y(t) = 4e^{-2t} + 2t - 1 - (-e^{-2(t-1)} + 2(t-1) + 1)\mathcal{U}(t-1)$ och uppdelning på intervallen ger svaret.

Svar a): $Y(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{4}{(s+2)s^2} - (\frac{4}{(s+2)s^2} + \frac{4}{(s+2)s})e^{-s}$,

b): $y(t) = \begin{cases} 4e^{-2t} + 2t - 1, & 0 < t < 1 \\ (4 + e^2)e^{-2t}, & 1 < t. \end{cases}$
