Version höger

Namn, linje och årskurs:

Lappskrivning nr. 2, Partiella differentialekvationer för ME och K, 25 februari 2011, kl. 10.00–11.00.

Vi betraktar differentialekvationen

$$(*) \quad xy'' + (1-2x)y' + 2\lambda y = 0$$

på intervallet $0 < x < \infty$ ($y = y(x)$). Tillsammans med lämpliga randvillkor i $x = 0$ och $x = +\infty$ bildar den ett Sturm-Liouville-problem för vilket parametern λ fungerar som egenvärde.

a) Skriv differentialekvationen på "Sturm-Liouville-form", dvs. på formen

$$(p(x)y')' + (q(x) + \lambda w(x))y = 0 \quad (0 < x < \infty)$$

för lämpliga funktioner $p(x)$, $q(x)$, $w(x)$. Kontrollera också att $p(x) > 0$, $w(x) > 0$ på hela intervallet $0 < x < \infty$.

b) Origo $x = 0$ är en regulärt singulär punkt för differentialekvationen $(*)$. Bestäm, i fallet $\lambda = 3$, en lösning till $(*)$ på formen $y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ för lämpligt r och med $a_0 = 1$. Tag med minst fyra termer i svaret (alltså t.o.m. $n = 3$).

Anm 1: a) och b) kan lösas oberoende av varandra.
Anm 2: $\lambda = 3$ visar sig vara ett egenvärde till Sturm-Liouville-problemet i a), och lösningen du finner i b) kommer att vara en tillhörande egenfunktion.

Lösningar (börja här, fortsätt på baksidan, och sedan på separata papper om det behövs):