Institutionen fär matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Tentamensskrivning, 2011-05-31, kl. 8.00-13.00.
SF 1648, Partiella differentialekvationer för ME och K.

- Tillåtna hjälpmedel: Formelsamlingen BETA (medhavd) samt "Formler ur Asmar" (10 sidor), som delas ut tillsammans med textlappen. (Ej miniräknare.)
- Tentamen består av 5 uppgifter, som var och en bedöms med 0–5 poäng. Betygsgränserna, för den totala poängsumman, inklusive bonus från lappskrivningar, är 23 (betyg A), 20 (betyg B), 17 (betyg C), 14 (betyg D), 11 (betyg E).

---

1. a) Funktionen $f(x) = 4x$ kan utvecklas i en sinusserie på intervallet $0 < x < \pi$:

$$4x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Bestäm koefficienterna b_n i denna.

b) Lös följande begynnelse/randvärdesproblem:

$$\begin{aligned}
\text{PDE}: &\quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && (0 < x < \pi,\ t > 0),\\
\text{RV}: &\quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0, && (t > 0),\\
\text{BV}: &\quad u(x,0) = 4x && (0 < x < \pi).
\end{aligned}$$

2. Bestäm, med hjälp av en potensserieansats av typen

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

där $a_0 = 1$, en lösning till differentialekvationen

$$x^2 y'' + xy' + (9x^2 - 4)y = 0.$$

Det räcker att det att ta med de tre första termerna skilda från noll.

3. För en oändligt lång stav gäller värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < \infty,\ t > 0).$$

Temperaturen vid tid $t = 0$ ges av funktionen

$$u(x,0) = xe^{-2x^2}.$$

Bestäm temperaturen $u(x,t)$ för alla $t > 0$ med hjälp av en lämplig transform.

4. I en burk med radie 2 dm och höjd 3 dm hålls locket vid potentialen 100 Volt, medan mantelytan och bottenytan är jordade, dvs har potential noll. Om (ρ, φ, z) betecknar cylinderkoordinater anpassade till burken så erhålls följande randvärdesproblem för den elektriska potentialen $V = V(\rho, \varphi, z)$:

$$\begin{aligned}
\text{PDE}: &\quad \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad && (0 < \rho < 2,\ 0 < z < 3),\\
\text{RV mantel}: &\quad V(2, z) = 0, && (0 < z < 3),\\
\text{RV botten}: &\quad V(\rho, 0) = 0, && (0 < \rho < 2).\\
\text{RV lock}: &\quad V(\rho, 3) = 100 && (0 < \rho < 2).
\end{aligned}$$

Underförstått är att V ska vara regulär också på z-axeln, vilket kan uttryckas som att $V(\rho, z)$ ska ha ett ändligt gränsvärde då $\rho \to 0$.

a) Lösningen V till ovanstående problem kommer inte att bero på φ. Förklara varför.

b) Bestäm lösningen till randvärdesproblemet.

5. Låt (r, φ) vara polära koordinater i planet, och låt $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

a) Bestäm den allmänna lösningen $U(r, \varphi)$ till differentialekvationen

$$r\frac{\partial U}{\partial r} + \mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$$

i en godtycklig cirkelskiva $0 \leq r < a$ (där $a > 0$ är ett fixt tal) genom att göra vanlig variabelseparation $U(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ under beaktande av att funktionen $\Phi(\varphi)$ måste vara 2π-periodisk och att U ska vara regulär även i origo. Lösningen U blir en komplexvärd funktion som lämpligen framställs i form av en oändlig serie med obestämda koefficienter.

b) Bestäm, i fallet $a = 1$, den lösning som uppfyller randvillkoret

$$U(1, \varphi) = 2 + 3e^{4\mathrm{i}\varphi}.$$

c) Undersök om det finns någon lösning som (med $a = 1$) uppfyller randvillkoret

$$U(1, \varphi) = 2\mathrm{i}\sin 5\varphi.$$

LYCKA TILL!